数书九章

Mathematical Treatise in Nine Sections

كِتَابُ التِّسْعِ فُصُولٍ فِي العُلُومِ الرِّيَاضِيَّةِ

قِين جِيُوشَاو -- القَرْن الثَّانِي عَشَر المِيلَادِي

Fascicle I – 大衍類

الجُزْءُ الأَوَّلُ: فَصْلُ الطَّرِيقَةِ الكُبْرَى

大衍求一术、大衍总数术及九问

طَرِيقَةُ اسْتِخْرَاجِ الوَحْدَةِ، وَطَرِيقَةُ جَمْعِ الأَعْدَادِ الكُبْرَى، وَالتِّسْعُ مَسَائِلَ

By **Qin Jiushao** (秦九韶) لِقِين جِيُوشَاو

c. 1202–1261 CE حَوَالَي عَام 1202--1261 م

Presented in the 7th year of Chunyou (淳祐七年), 1247 CE

مُقَدَّمَةٌ فِي السَّنَةِ السَّابِعَةِ مِن عَهْدِ شُونْيُو، 1247 مِيلَادِيَّةً

Chinese → Arabic Bilingual Translation Edition

طَبْعَةٌ ثُنَائِيَّةُ اللُّغَةِ: الصِّينِيَّةُ وَالعَرَبِيَّةُ

One of the greatest masterpieces of Chinese mathematics,
containing the general Chinese Remainder Theorem (Dayan method),
numerical solutions of polynomial equations, surveying problems,
and commercial and financial mathematics.

مِن أَعْظَمِ مُؤَلَّفَاتِ الرِّيَاضِيَاتِ الصِّينِيَّةِ، يَتَضَمَّنُ مُبَرْهَنَةَ البَوَاقِي الصِّينِيَّةَ العَامَّةَ (الطَّرِيقَةُ الكُبْرَى)

1 Introduction

序说

The *Shuxue Jiuzhang* (数书九章, Mathematical Treatise in Nine Sections) is the magnum opus of the Song dynasty mathematician Qin Jiushao (秦九韶, c. 1202–1261). Completed in 1247 CE during the Chunyou era (淳祐七年), it stands as one of the greatest achievements in the history of Chinese mathematics and of world mathematics.

The work is organized into nine categories (类), each containing nine problems (问), for a total of eighty-one problems. The nine categories are:

1. **Dayan** (大衍) – The Great Derivation
2. **Tianshi** (天时) – Astronomical phenomena
3. **Tianyu** (田域) – Land measurement
4. **Cewang** (测望) – Surveying
5. **Fuyi** (赋役) – Taxation
6. **Qian'gu** (钱谷) – Currency and grain
7. **Yingjian** (营建) – Construction
8. **Junlv** (军旅) – Military affairs
9. **Shiyi** (市易) – Market transactions

Each problem follows a rigorous four-part structure:

- **Wen** (问) – The problem statement
- **Da** (答) – The numerical answer
- **Shu** (术) – The general method and algorithm
- **Cao** (草) – The detailed working

1.1 The Dayan Category (大衍类)

Fascicle I covers the first category, *Dayan* (大衍, "Great Derivation"), devoted to the general solution of systems of linear congruences—what is now known worldwide as the **Chinese Remainder Theorem**.

> 大衍之数五十，其用四十有九。分而为二以象两，挂一以象三，揲之以四以象四时，归奇于扐以象闰。五岁再闰，故再扐而后挂。
>
> *The number of the Great Derivation is fifty; of these, forty-nine are used. Divide into two to symbolize the Two [heaven and earth]; hang one to symbolize the Three [heaven, earth, and man]; count off by fours to symbolize the Four Seasons; return the remainder to symbolize the intercalary month. Five years have two intercalary months, so repeat the process twice and then hang again.*

المُقَدِّمَةُ

يُعَدُّ كِتَابُ "شُو شُو جِوْ جَانْغ" (الأَقْسَامُ التِّسْعَةُ فِي العُلُومِ الرِّيَاضِيَّةِ) الإِنْجَازَ الأَعْظَمَ لِلرِّيَاضِيِّ الصِّينِيِّ قِين جِيُوشَاو (حَوَالَي 1202--1261 م) فِي عَهْدِ سُلالَةِ سُونْغ. أُكْمِلَ فِي عَام 1247 مِيلَادِيَّةً، وَيُعْتَبَرُ مِن أَعْظَمِ الإِنْجَازَاتِ فِي تَارِيخِ الرِّيَاضِيَاتِ الصِّينِيَّةِ وَالعَالَمِيَّةِ.

يَنْقَسِمُ العَمَلُ إِلَى تِسْعِ فُصُولٍ (类)، كُلُّ فَصْلٍ يَحْتَوِي عَلَى تِسْعِ مَسَائِلَ (问)، لِيَصِلَ المَجْمُوعُ إِلَى وَاحِدٍ وَثَمَانِينَ مَسْأَلَةً. التِّسْعَةُ الأَقْسَامُ هِيَ:

1. الطَّرِيقَةُ الكُبْرَى (衍大) -- الطَّرِيقَةُ العُظْمَى
2. الظَّوَاهِرُ الفَلَكِيَّةُ (时天)
3. قِيَاسُ الأَرْضِ (域田)
4. المِسَاحَةُ وَالرَّصْدُ (望测)
5. الضَّرَائِبُ وَالخِدْمَاتُ (役赋)
6. العُمْلَاتُ وَالحُبُوبُ (谷钱)
7. البِنَاءُ وَالهَنْدَسَةُ (建营)
8. الشُّؤُونُ العَسْكَرِيَّةُ (旅军)
9. مُعَامَلَاتُ السُّوقِ (易市)

كُلُّ مَسْأَلَةٍ تَتَّبِعُ هَيْكَلاً مُرَكَّبًا مِنْ أَرْبَعَةِ أَجْزَاءٍ:

- المَسْأَلَةُ (问) -- نَصُّ المَسْأَلَةِ
- الجَوَابُ (答) -- الإِجَابَةُ الرَّقْمِيَّةُ
- الطَّرِيقَةُ (术) -- الأُسْلُوبُ العَامُّ وَالخَوَارِزْمِيَّةُ
- العَمَلُ المُفَصَّلُ (草) -- الشَّرْحُ العَمَلِيُّ المُفَصَّلُ

فَصْلُ الطَّرِيقَةِ الكُبْرَى (衍大类)

يُغَطِّي الجُزْءُ الأَوَّلُ الفَصْلَ الأَوَّلَ، وَهُوَ فَصْلُ الطَّرِيقَةِ الكُبْرَى (衍大)، المُخَصَّصُ لِلحَلِّ العَامِّ لِنِظَامِ المُعَادَلَاتِ الخَطِّيَّةِ المُتَبَادِلِيَّةِ -- وَهُوَ مَا يُعْرَفُ اليَوْمَ عَالَمِيًّا بِـ**مُبَرْهَنَةِ البَوَاقِي الصِّينِيَّةِ**.

> عَدَدُ الطَّرِيقَةِ العُظْمَى خَمْسُونَ، وَالمُسْتَخْدَمُ مِنْهَا تِسْعَةٌ وَأَرْبَعُونَ. اِقْسِمْهَا نِصْفَيْنِ لِتُمَثِّلِ الاثْنَيْنِ، وَعَلِّقْ وَاحِدًا لِتُمَثِّلَ الثَّلَاثَةَ، وَاِعْدُدْ بِأَرْبَعَةٍ لِتُمَثِّلَ الفُصُولَ الأَرْبَعَةَ، وَأَرْجِعِ البَاقِيَ لِيُمَثِّلَ الشَّهْرَ الكَبِيسَ. لِأَنَّ فِي كُلِّ خَمْسِ سِنِينَ شَهْرَيْنِ كَبِيسَيْنِ.

The nine problems of the Dayan category are:

1. 蓍卦发微 – Divination by Yarrow Stalks
2. 古历会积 – Ancient Calendar Accumulation
3. 推计土功 – Estimating Earthworks
4. 推库额钱 – Calculating Treasury Funds
5. 分粜推原 – Grain Distribution
6. 程行计地 – Journey Distance Calculation
7. 程行相及 – Catching Up on a Journey
8. 积尺寻源 – Finding Dimensions from Volume
9. 余米推数 – Calculating Rice Remainders

التِّسْعُ مَسَائِلُ فَصْلِ الطَّرِيقَةِ الكُبْرَى هِيَ:

1. (微发卦蓍) كَشْفُ أَسْرَارِ الكَشْفِ بِعِيدَانِ الأَرِيكَةِ
2. (积会历古) تَرَاكُمُ التَّقْوِيمِ القَدِيمِ
3. (功土计推) تَقْدِيرُ أَعْمَالِ التُّرَابِ
4. (钱额库推) حِسَابُ أَمْوَالِ الخَزِينَةِ
5. (原推粜分) تَوْزِيعُ الحُبُوبِ
6. (地计行程) حِسَابُ مَسَافَةِ الرِّحْلَةِ
7. (及相行程) التَّقَابُلُ فِي الرِّحْلَةِ
8. (源寻尺积) اِسْتِقْصَاءُ المَقَادِيرِ مِنَ الحُجْمِ
9. (数推米余) تَعْيِينُ كَمِّيَّةِ الأُرُزِّ البَاقِيَةِ

2 Preface (序)

序

Classical Chinese Preface by Qin Jiushao (1247 CE)

周教六艺，数实成之。学士大夫所从事尚矣。其用本太虚生一，而周流无穷。大则可以通神明、顺性命，小则可以经世务、类万物，讵容以浅近窥哉？

若昔推策以迎日，定律而和气。髀距濬川，土圭度晷。天地之大，囿焉而不能外，况其间总总者乎？爰自河图洛书，闯发幽秘；八卦九畴，错综精微。极而至于大衍、皇极之用，而人事之变无不该，鬼神之情莫能隐矣。圣人神之言而遗其粗，常人昧之由而莫之觉。要其归，则数与道非二本也。

汉去古未远，有张苍、许商、马延年、耿寿昌、郑玄、张衡、刘洪之伦，或明天道而法传于后，或计功策而效验于时。后世学者自高鄙不之讲，此学殆绝。惟治历畴人能为乘除，而弗通于开方衍变。若官府会事，则府史一二累之，算家位置素所不识，上之人亦委而听焉。持算者惟若人，则鄙之也宜矣。

呜呼！乐有制氏，仅记铿锵之声，而谓与天地同和者止于是，可乎？今数术之书尚三十余家。天象历度谓之缀术，太乙壬甲谓之三式，皆曰内算，言其秘也。九章所载及周官九数，系于方圆者为专术，皆曰外算，对内而言也。其用相通，不可歧二。独大衍法不载九章，未有能推之者。历家演法颇用之，以为方程者，误也。

المُقَدِّمَةُ

بِقَلَمِ قِين جِيُوشَاو (عَام 1247 مِيلَادِيَّةً)

إِنَّ عُلُومَ الأُمَّةِ السِّتَّ فِي التَّعْلِيمِ الزَّمَكْشَفِيِّ قَدْ أَكْمَلَتْهَا الرِّيَاضَةُ. وَقَدْ اِشْتَغَلَ بِهَا طُلَّابُ العِلْمِ وَالعُظَمَاءُ مُنْذُ زَمَانٍ بَعِيدٍ. أَصْلُهَا: اللاَّشَيْءُ يُنْشِئُ الوَاحِدَ، فَتَدُورُ فِي مَجَالٍ لاَ يَنْتَهِي. فِي الكُبْرَى تَصِلُ إِلَى فَهْمِ الأَلِهَةِ وَطَاعَةِ المَصِيرِ، وَفِي الصُّغْرَى تُدَبِّرُ شُؤُونَ الدُّنْيَا وَتُصَنِّفُ جَمِيعَ الأَشْيَاءِ. فَكَيْفَ يُمْكِنُ اِسْتِيعَابُهَا بِنَظْرَةٍ ضَحْلَةٍ؟

فِي المَاضِي، كَانُوا يَسْتَخْدِمُونَ العِصِيَّ لاسْتِقْبَالِ الشَّمْسِ، وَيَضَعُونَ القَوَانِينَ لِيُنَاسِبُوا الإِيقَاعَ السَّمَاوِيَّ. يَقِيسُونَ بِالأَسْطُوَانَاتِ وَيُجَرِّفُونَ الأَنْهَارَ، وَيَعِيرُونَ بِالأُرْجُوحَةِ التُّرَابِيَّةِ لِقِيَاسِ ظِلِّ الشَّمْسِ. أَمَّا عَظَمَةُ السَّمَاءِ وَالأَرْضِ فَإِنَّهَا مَحْصُورَةٌ لاَ يُمْكِنُ الخُرُوجُ عَنْهَا، فَكَيْفَ بِمَا فِي وَسَطِهَا؟

مُنْذُ خَرِيطَةِ النَّهْرِ وَكِتَابِ اللُّؤْلُؤَةِ، تَمَّ كَشْفُ الأَسْرَارِ الخَفِيَّةِ. وَالأَرْقَامُ الثَّمَانِيَةُ وَالتِّسْعَةُ الأَنْوَاعِ تَتَشَابَكُ فِي دِقَّتِهَا الوَافِرَةِ. حَتَّى الطَّرِيقَةُ العُظْمَى وَالقُصْوَى، فَلَيْسَ مِن تَغَيُّرَاتِ البَشَرِ إِلاَّ وَقَدْ شَمِلَتْهَا، وَلَا مِنْ أَحْوَالِ الأَرْوَاحِ إِلاَّ وَقَدْ أَظْهَرَتْهَا.

الأَحْكَامُ الفَلَكِيَّةُ فِي سُلالَةِ هَانْ لَمْ تَكُنْ بَعِيدَةً عَنِ العُصُورِ القَدِيمَةِ. كَانَ هُنَاكَ: جَانْغ تْسَانْغ، شُو شَانْغ، مَا يَنْ نِينْ، غِنْغ شُوجَانْغ، جُونْغ شُوَانْ، جَانْغ هِنْغ، لِيُو هُنْغ وَغَيْرُهُمْ. بَعْضُهُمْ فَهِمَ قَانُونَ السَّمَاءِ فَنَقَلَهُ إِلَى مَا بَعْدَهُ، وَبَعْضُهُمْ حَاسَبَ الإِنْجَازَاتِ فَتَحَقَّقَتْ صِحَّتُهُ.

且天下之事多矣。古之人先事而计，计定而行。仰观俯察，人谋鬼谋，无所不用其谨，是以不愆于成。载籍章章可覆也。后世兴事造始，鲜能考度，悠悠乎天纪人事之殽缺矣，可不求其故哉？

أَمَّا عُلَمَاءُ العُصُورِ المُتَأَخِّرَةُ فَقَد اسْتَكْبَرُوا عَنْ دِرَاسَتِهَا، فَكَادَتْ هَذِهِ المَعْرِفَةُ أَنْ تَنْدَثِرَ. لَمْ يَبْقَ إِلاَّ مُعَدِّلُو التَّقَاوِيمِ يَقْدِرُونَ عَلَى الضَّرْبِ وَالقِسْمَةِ، دُونَ فَهْمِ التَّطْوِيرِ الجَذْرِيِّ. فَإِنْ كَانَ أَهْلُ الحِسَابِ هَكَذَا، فَاسْتِحْقَارُهُمْ مُسْتَحَقٌّ.

九韶愚陋，不闲于艺。然早岁侍亲中都，因得访习于太史，又尝从隐君子受数学。时际兵难，历岁遥塞，不自意全于矢石之间。更险离忧，荏苒十禩，心槁气落。信知夫物莫不有数也，乃肆意其间，旁诹方能，探索杳眇，粗若有得焉。所谓通神明、顺性命，固肤末于见。若其小者，窃尝设为问答，以拟于用。积多而惜其弃，因取八十一题，厘为九类，立术具草，间以图发之。恐或可备博学多识君子之余观，曲艺可遂也，愿进之于道。傥曰艺成而下，是惟畴人府史流也，乌足尽天下之用，亦无瞢焉。

أَسْفَاهُ! فِي المُوسِيقَى هُنَاكَ عَائِلَةُ جُو، تَحْفَظُ فَقَط أَصْوَاتَ الجَوَاهِرِ، فَهَلْ يَعْقِلُ أَنَّ التَّنَاغُمَ مَعَ السَّمَاوَاتِ يَقِفُ عِنْدَ هَذَا؟

时淳祐七年九月，鲁郡秦九韶叙。

كُتُبُ الرِّيَاضَاتِ اليَوْمَ لاَ تَزَالُ تَزْهُو بِأَكْثَرَ مِنْ ثَلاثِينَ بَيْتًا. فَنُجُومُ السَّمَاءِ وَدَرَجَاتُ التَّقْوِيمِ تُسَمَّى "فَنَّ الإِلْحَاقِ"، وَالتَّالِي وَالرِّيَانْ جَا وَالحِيَا تُسَمَّى "الطُّرُقَ الثَّلاثَ"، وَكُلُّهَا تُدْعَى "الحِسَابَ الدَّاخِلِيَّ" لِسِرِّيَّتِهَا. أَمَّا مَا فِي كِتَابِ الأَقْسَامِ التِّسْعَةِ وَتِسْعَةُ أَرْقَامِ "جُو" فَتُسَمَّى "الحِسَابَ الخَارِجِيَّ"، لِأَنَّهَا خَارِجَةٌ عَنِ الدَّاخِلِيِّ. إِلاَّ أَنَّهَا مُتَصِلَةٌ فِي الوَظِيفَةِ، فَلاَ يُمْكِنُ الفَصْلُ بَيْنَهَا.

وَحْدَهَا طَرِيقَةُ الطَّرِيقَةِ العُظْمَى لَمْ تُذْكَرْ فِي الأَقْسَامِ التِّسْعَةِ، وَلَمْ يَكُنْ هُنَاكَ مَنْ يَسْتَطِيعُ اسْتِنْبَاطَهَا. أَهْلُ التَّقَاوِيمِ اسْتَخْدَمُوهَا كَثِيرًا فِي حِسَابَاتِهِمْ، لَكِنَّ مَنْ ظَنَّهَا مُعَادَلَاتٍ فَقَطْ فَقَدْ أَخْطَأَ.

يَا لَهَا مِنْ دُنْيَا وَاسِعَةِ الشُّؤُونِ! فَأَهْلُ العُصُورِ الخَالِيَةِ كَانُوا يُدَبِّرُونَ قَبْلَ الأَحْدَاثِ، فَإِذَا حَسُنَ التَّدْبِيرُ تَمَّ العَمَلُ. يَنْظُرُونَ إِلَى السَّمَاءِ وَيَرْصُدُونَ الأَرْضَ، يَتَشَاوَرُونَ بَيْنَهُمْ وَمَعَ الرُّوحَانِيَّاتِ، فَلاَ يَفْعَلُونَ شَيْئًا إِلاَّ بِعِنَايَةٍ شَدِيدَةٍ.

أَمَّا أَنَا جِيُوشَاو فَأَنَا رَجُلٌ بَلِيدٌ قَلِيلُ المَعْرِفَةِ. غَيْرَ أَنَّنِي فِي صِغَرِي خِدْتُ وَالِدَيَّ فِي العَاصِمَةِ، فَتَمَكَّنْتُ مِنْ زِيَارَةِ مَعْهَدِ الفَلَكِ لِلتَّعَلُّمِ. وَقَدْ تَتَلْمَذْتُ عَلَى يَدِ عَالِمٍ حَكِيمٍ فِي عِلْمِ الأَرْقَامِ.

حِينَ وَقَعَتِ الحُرُوبُ، عَبَرْتُ سِنِينَ طَوِيلَةً مُتَنَقِّلاً بَيْنَ المُدُنِ البَعِيدَةِ، وَلَمْ أَظُنَّ أَنَّنِي سَأَنْجُو مِنْ بَيْنِ السِّهَامِ وَالحِجَارَةِ. تَجَاوَزْتُ الأَخْطَارَ وَالأَحْزَانَ، وَمَرَّتْ عَشْرُ سَنَوَاتٍ، وَقَلْبِي يَابِسٌ وَهِمَّتِي سَاقِطَةٌ.

عِنْدَئِذٍ آمَنْتُ أَنَّ كُلَّ شَيْءٍ لَهُ عَدَدُهُ، فَانْغَمَسْتُ فِي عِلْمِ الأَرْقَامِ، أَسْتَكْشِفُ الأَعْمَاقَ البَعِيدَةَ، فَحَصَلْتُ عَلَى نَتَائِجَ مُتَوَاضِعَةٍ. أَمَّا المَقُولُ: "اتِّصَالُ الأَلْهَةِ وَطَاعَةُ المَصِيرِ" فَهُوَ بَعِيدٌ عَنْ فَهْمِي السَّطِيحِ. لَكِنِّي جَرَّبْتُ أَنْ أَضَعَ مَسَائِلَ وَأَجْوِبَةً لِلتَّطْبِيقِ.

ثُمَّ تَرَاكَمَتِ المَسَائِلُ فَخِفْتُ أَنْ تَضِيعَ، فَاخْتَرْتُ وَاحِدًا وَثَمَانِينَ مَسْأَلَةً، رَتَّبْتُهَا فِي تِسْعَةِ فُصُولٍ، وَضَعْتُ لَهَا الطُّرُقَ وَالأَعْمَالَ، وَأَحْيَانًا بِالرُّسُومِ. لَعَلَّهَا تَكُونُ لِأُولِي العِلْمِ الوَاسِعِ مَوْضُوعَ اطِّلاَعٍ.

قِين جِيُوشَاو مِن لُو جُونْ فِي شَهْرِ أَيْلُولَ، السَّنَةُ السَّابِعَةُ مِن عَهْدِ شُونْيُو، عَام 1247 م

3 The Nine Categories in Verse (九类赋)

九类赋

昆仑旁薄，道本虚一。圣有大衍，微寓于《易》。奇余取策，群数皆捐。衍而究之，探隐之原。

述大衍第一

مَقَالُ التِّسْعَةِ الأَقْسَامِ

جِبَالُ كُونْلُونْ الشَّامِخَةُ، وَأَصْلُ الطَّرِيقِ هُوَ الفَرَاغُ الوَاحِدُ. أَتَى الأَقْدَمُونَ بِالطَّرِيقَةِ العُظْمَى، فَتَجَلَّتْ فِي كِتَابِ التَّغَيُّرَاتِ. يَأْخُذُونَ العَصَا وَالبَوَاقِي، فَتَنْصَرِفُ الجُمْهُورَةُ. لِنَفْحَصَهَا وَنَبْحَثَ عَنْ أَصْلِ الخَفَاءِ.

فَصْلُ الطَّرِيقَةِ العُظْمَى -- الأَوَّلُ

数术之传，以实为体。其书九章，惟兹弗纪。历家虽用，用而不知。小试经世，姑推所为。

七精回穹，人事之纪。追缀而求，宵星昼晷。历久则疏，惟智能革。不寻天道，模袭何益。

述天时第二

魁隗粒民，甄度四海。苍姬井之，仁政攸在。代远庶蕃，垦菑日广。步度庀赋，版图是掌。方圆异状，袤窳殊形。专术精微，孰究其真。差之毫厘，谬乃千里。公私共弊，盍谨其籍。

述田域第三

莫高匪山，莫濬匪川。神禹奠之，积矩攸传。智创巧述，重差夕桀。求之既详，揆之罔越。崇深广远，度则靡容。形格势禁，寇垒仇墉。欲知其数，先望以表。因差施术，坐悉微渺。

述测望第四

邦国之赋，以待百事。畦田经入，取之有度。未免力役，先商厥功。以衰以率，逸乃同功。汉犹近古，租税以算。调均钱谷，何菑之捍。惟仁隐民，犹己溺饥。赋役不均，宁得勿思。

述赋役第五

物等敛赋，式时府庾。粒粟寸丝，褐夫红女。商征边籴，后世多端。立缘为欺，上下俱殚。我闻理财，如智治水。澄源濬流，惟其深矣。彼昧弗察，急于烦刑。去理益远，吁嗟不仁。

述钱谷第六

斯城斯池，乃栋乃宇。宅坐寄命，以保以聚。鸠功雉制，竹个本章。匪究匪度，财蠹力伤。围蔡而裁，如子西素。匠计露台，俾汉文惧。惟武图功，惟俭昭德。有国有家，兹焉取则。

述营建第七

天生五材，兵去未可。不教而战，维上之过。堂堂之阵，鹅鹳为行。营应规矩，其将莫当。师中之吉，惟智仁勇。夜算军书，先计攸重。我闻在昔，轻则寡谋。殄民以幸，亦孔之忧。

述军旅第八

日中而市，万民所资。贾贸墆鬻，利析铢锱。蹛财役贫，封君低首。豕末兼并，非国之厚。

述市易第九

تَنْقُلُ الرِّيَاضَةُ جِيلًا بَعْدَ جِيلٍ، وَجِسْمُهَا الحَقِيقَةُ. كِتَابُ الأَقْسَامِ التِّسْعَةِ لَمْ يَذْكُرْهَا.

أَهْلُ التَّقَاوِيمِ اسْتَخْدَمُوهَا دُونَ فَهْمِهَا. لِنَجْرِبْ فِي إِدَارَةِ الدُّنْيَا وَنَسْتَنْبِطَ مَا يَنْبَغِي.

سَبْعَةُ كَوَاكِبَ تَدُورُ فِي الفُضَاءِ، وَهِيَ قَاعِدَةُ شُؤُونِ البَشَرِ. نَتَبَعُهَا لَيْلًا وَنَهَارًا. مَرَّ الزَّمَانُ فَصَارَتْ غَيْرَ دَقِيقَةٍ، وَالحِكْمَةُ وَحْدَهَا تُجَدِّدُهَا.

فَصْلُ الأَحْوَالِ السَّمَاوِيَّةِ -- الثَّانِي

فَصْلُ قِيَاسِ الأَرْضِ -- الثَّالِثُ

فَصْلُ الرُّصْدِ وَالمِسَاحَةِ -- الرَّابِعُ

فَصْلُ الضَّرَائِبِ وَالخِدْمَاتِ -- الخَامِسُ

فَصْلُ العُمْلَاتِ وَالحُبُوبِ -- السَّادِسُ

فَصْلُ البِنَاءِ -- السَّابِعُ

فَصْلُ الشُّؤُونِ العَسْكَرِيَّةِ -- الثَّامِنُ

فَصْلُ مُعَامَلَاتِ السُّوقِ -- التَّاسِعُ

4 The Dayan General Method (大衍总数术)

طَرِيقَةُ جَمْعِ الأَعْدَادِ العُظْمَى

4.1 Editorial Commentary (按)

按：按大衍术，以各分数之奇零求各分数之总数。大而天行，小而物数，皆可御之。其法有求元、求定、求衍、求奇、求乘、求用之目。大约以数之奇偶为根，而以诸数相度之尽不尽为用。

تَعْلِيقُ المُحَرِّرِ:

有求彼此不能度尽之诸数者，元数、定数是也。有求诸数皆能度尽之一数者，衍母数是也。有求诸数皆能度尽而一数不能度尽之数者，各衍数是也。其不尽之数，即奇数也。有求二数相度余一之数者，乘数是也。有求二数相度余一而诸数又能度尽之数者，用数是也。

此法乃秦九韶之所独得，九章所不载，刘徽、祖冲之所未尝言。其精妙在于求一术，能以两数之最大公度求乘率，使乘率乘奇数满定母去之余一。此术一出，而历家积年之算、物不知数之问，皆有定法可循矣。

طَرِيقَةُ الطَّرِيقَةِ العُظْمَى تَطْلُبُ المَجْمُوعَ الكُلِّيَّ لِكُلِّ العَدَدِ مِنْ خِلَالِ بَوَاقِيهَا. فَمِنَ السَّمَاءِ الكُبْرَى إِلَى عَدَدِ الأَجْسَامِ الصَّغِيرَةِ، جَمِيعُهَا يُمْكِنُ مُعَالَجَتُهَا. لِهَذَا الأُسْلُوبِ فُرُوضٌ: طَلَبُ الأَصْلِ، وَطَلَبُ التَّثْبِيتِ، وَطَلَبُ المُشْتَقَّاتِ، وَطَلَبُ الفَرْدِيَّةِ، وَطَلَبُ مُعَدِّلِ الضَّرْبِ، وَطَلَبُ العَدَدِ المُسْتَخْدَمِ.

الأَعْدَادُ الأَصْلِيَّةُ وَالمُثَبَّتَةُ هِيَ الَّتِي لَا يُمْكِنُ قِسْمَتُهَا بَعْضُهَا عَلَى بَعْضٍ. وَالجِذْرُ المُشْتَرَكُ (母衍) هُوَ العَدَدُ الوَاحِدُ الَّذِي تُمْكِنُ قِسْمَةُ جَمِيعِ الأَعْدَادِ عَلَيْهِ. وَالمُشْتَقَّاتُ (衍数) هِيَ الأَعْدَادُ الَّتِي يُمْكِنُ قِسْمَتُهَا عَلَى جَمِيعِ الأَعْدَادِ مَعَدًّا وَاحِدًا. وَالبَاقِي (奇数) هُوَ ذَلِكَ الَّذِي لَا يُقْسَمُ. وَمُعَدِّلُ الضَّرْبِ (率乘) هُوَ الَّذِي عِنْدَ ضَرْبِهِ فِي العَدَدِ البَاقِي يُعْطِي الوَاحِدَ بَعْدَ إِزَالَةِ القَاسِمِ المُثَبَّتِ.

هَذِهِ الطَّرِيقَةُ هِيَ اِكْتِشَافٌ خَاصٌّ بِقِينِ جِيُوشَاو، لَمْ تُذْكَرْ فِي كِتَابِ الأَقْسَامِ التِّسْعَةِ، وَلَمْ يَتَحَدَّثْ عَنْهَا لَايُو هُوِي وَلَا زُو جِونْجِ. دِقَّتُهَا تَكْمُنُ فِي طَرِيقَةِ اسْتِخْرَاجِ الوَحْدَةِ، الَّتِي تَسْتَطِيعُ أَنْ تَسْتَخْرِجَ مُعَدِّلَ الضَّرْبِ بِأَقْصَى قَاسِمٍ مُشْتَرَكٍ لِعَدَدَيْنِ، حَتَّى إِنَّ مُعَدِّلَ الضَّرْبِ يُضَرَّبُ فِي العَدَدِ الفَرْدِيِّ فَيَكُونُ البَاقِي وَاحِدًا بَعْدَ إِزَالَةِ المُثَبَّتِ.

4.2 The Four Types of Numbers (四华数)

الأَنْوَاعُ الأَرْبَعَةُ مِنَ الأَعْدَادِ

大衍总数术曰：置诸问数，类名有四。

1. **元数** (元数) – 谓尾位见单零者。本门揲蓍、酒息、斛粜、砌砖、失米之类是也。 This refers to numbers that are integers with no fractional part. Problems involving yarrow stalks, wine interest, grain measures, brick laying, and lost rice all use this type.
2. **收数** (收数) – 谓尾位见分厘者。假令冬至三百六十五日二十五刻，欲与甲子六十日为一会而求积日之类。 This refers to numbers with fractional parts (e.g., 365.25 days). One converts the fractional part to whole numbers by finding a common denominator.
3. **通数** (通数) – 谓诸数各有分子分母者。本门问一会积年是也。 This refers to numbers that are all fractions with numerators and denominators. One cross-multiplies to obtain common denominator numbers.
4. **复数** (复数) – 谓尾位见十或百及千以上者。本门筑堤并急足之类是也。 This refers to numbers ending in tens, hundreds, or thousands. These require special reduction to obtain the original numbers.

قَالَتْ طَرِيقَةُ جَمْعِ الأَعْدَادِ العُظْمَى: ضَعْ جَمِيعَ أَعْدَادِ المَسَائِلِ، وَلَهَا أَرْبَعَةُ أَسْمَاءٍ.

1. الأَعْدَادُ الأَصْلِيَّةُ (数元) -- وَهِيَ الَّتِي يَظْهَرُ فِي نِهَايَتِهَا صِفْرٌ وَاحِدٌ. مِثْلُ أَعْدَادِ عِيدَانِ الأَرِيكَةِ، وَفَوَائِدِ الخَمْرِ، وَكَيْلِ الحُبُوبِ، وَتَرْصِيصِ الطُّوبِ، وَالأُرُزِّ المَفْقُودِ. وَهِيَ الأَعْدَادُ الصَّحِيحَةُ الَّتِي لَيْسَ لَهَا جُزْءٌ كَسْرِيٌّ.
2. أَعْدَادُ الجَمْعِ (数收) -- وَهِيَ الَّتِي يَظْهَرُ فِي نِهَايَتِهَا أَجْزَاءٌ مِنْ عُشْرَةٍ أَوْ مِنْ مِئَةٍ. مِثْلُ الدَّوَامَةِ الشِّتَائِيَّةِ ثَلَاثُ مِئَةٍ وَخَمْسَةٌ وَسِتُّونَ يَوْمًا وَخَمْسٌ وَعِشْرُونَ دَقِيقَةً. يُحَوَّلُ الجُزْءُ الكَسْرِيُّ إِلَى أَعْدَادٍ صَحِيحَةٍ بِإِيجَادِ مَقَامٍ مُشْتَرَكٍ.
3. أَعْدَادُ العُبُورِ (数通) -- وَهِيَ الأَعْدَادُ الَّتِي لِكُلٍّ مِنْهَا بَسْطٌ وَمَقَامٌ. يُضَارَعُ البَسْطُ فِي المَقَامِ لِيُعْطِيَ أَعْدَادًا صَحِيحَةً بِمَقَامٍ مُشْتَرَكٍ.
4. أَعْدَادُ الإِعَادَةِ (数复) -- وَهِيَ الَّتِي تَنْتَهِي بِعَشَرَاتٍ أَوْ مِئَاتٍ أَوْ أُلُوفٍ. تَحْتَاجُ إِلَى تَخْفِيضٍ خَاصٍّ لِاسْتِرْجَاعِ الأَعْدَادِ الأَصْلِيَّةِ.

4.3 Finding the Definitive Numbers (求定数)

اسْتِخْرَاجُ الأَعْدَادِ المُثَبَّتَةِ

元数者：先以两两连环求等，约奇弗约偶。或约得五而彼有十，乃约偶弗约奇。或元数俱偶，约毕可存一位见偶。或皆约而犹有类数存，姑置之，俟与其他约遍而后乃与姑置者求等约之。或诸数皆不可尽类，则以诸元数命曰定数，以复数格入之。

أَمَّا الأَعْدَادُ الأَصْلِيَّةُ: أَوَّلاً طَلَبُ المُشْتَرَكِ بِالطَّرِيقَةِ المُتَصِلَةِ ثُنَائِيًّا، فَتُخَفَّضُ الفَرْدِيَّةُ لاَ الزَّوْجِيَّةُ. إِنْ خُفِّضَتْ إِلَى خَمْسَةٍ وَكَانَتْ هُنَاكَ عَشَرَةٌ، فَخَفِّضِ الزَّوْجِيَّ لاَ الفَرْدِيَّ. إِنْ كَانَتِ الأَعْدَادُ الأَصْلِيَّةُ كُلُّهَا زَوْجِيَّةً، فَبَعْدَ التَّخْفِيضِ يُمْكِنُ الإِبْقَاءُ عَلَى مَوْضِعٍ وَاحِدٍ زَوْجِيٍّ.

收数者：乃命尾位分厘作单零，以进所问之数，定位讫，用元数格入之。或如意立数为母，收进分厘以从所问，用通数格入之。

وَأَمَّا أَعْدَادُ الجَمْعِ: فَأَمْرُ نِهَايَةِ الأَجْزَاءِ مِنَ العُشْرَةِ أَوِ المِئَةِ أَنْ تُجْعَلَ صِفْرًا وَاحِدًا، فَيَتَقَدَّمُ عَدَدُ المَسْأَلَةِ.

通数者：置问数通分纳子，互乘之，皆曰通数。求总等，不约一位，约众位，得各原法数，用元数格入之。或诸母数繁，就分从省通之者，皆不用元，各母仍求总等，存一位约众位，亦各得原法数，亦用元法数格入之。

وَأَمَّا أَعْدَادُ العَبُورِ: ضَعْ أَعْدَادَ المَسَائِلِ فَأَجْرِ عَلَيْهَا عَمَلِيَّةَ جَمْعِ البَسْطِ فِي المَقَامِ، ثُمَّ اِضْرِبْهَا بَعْضَهَا فِي بَعْضٍ، فَكُلُّهَا تُسَمَّى أَعْدَادَ العَبُورِ.

复数者：问数尾位见十以上者，以诸数求总等，存一位约众位，始得元数。两两连环求等，约奇弗约偶，复乘偶；或约偶弗约奇，弗乘奇。

وَأَمَّا أَعْدَادُ الإِعَادَةِ: فَالمَسَائِلُ الَّتِي تَنْتَهِي بِعَشَرَاتٍ فَصَاعِدًا، نَطْلُبُ المُشْتَرَكَ الأَعْظَمَ لِجَمِيعِ الأَعْدَادِ، فَنُبْقِي مَوْضِعًا وَاحِدًا وَنُخَفِّضُ البَاقِيَ، فَنَحْصُلُ عَلَى الأَعْدَادِ الأَصْلِيَّةِ.

4.4 Computing the Derivative Numbers (求衍数、奇数、乘率、用数)

اسْتِخْرَاجُ الأَعْدَادِ المُشْتَقَّةِ وَالفَرْدِيَّاتِ وَمُعَدِّلَاتِ الضَّرْبِ وَالأَعْدَادِ المُسْتَخْدَمَةِ

求定数勿使两位见偶，勿使见一太多。见一多则借用繁，不欲借则任得一。

فِي اسْتِخْرَاجِ الأَعْدَادِ المُثَبَّتَةِ: لَا تَجْعَلْ مَوْضِعَيْنِ زَوْجِيَّيْنِ، وَلَا تَجْعَلِ الوَاحِدَ كَثِيرًا. فَإِنْ كَثُرَتِ الأَوَاحِدُ تَعَقَّدَتِ العَمَلِيَّةُ.

以定相乘为衍母，以各定约衍母，得各衍数。或列各定数于右行，各立天元一为子于左行，以母互乘子，亦得衍数。

يُضَرَّبُ المُثَبَّتُ فِي بَعْضِهِ لِيُعْطِيَ الجِذْرَ المُشْتَرَكَ (衍母). ثُمَّ يُقَسَّمُ كُلُّ مُثَبَّتٍ عَلَى الجِذْرِ المُشْتَرَكِ فَتَكُونُ الأَعْدَادُ المُشْتَقَّةُ. أَوْ: ضَعِ المُثَبَّتَاتِ فِي الصَّفِّ الأَيْمَنِ، وَضَعِ الوَاحِدَ السَّمَاوِيَّ فِي الصَّفِّ الأَيْسَرِ، ثُمَّ اِضْرَبِ البِسَاطَ بَعْضُهُ فِي بَعْضٍ فَتَكُونُ الأَعْدَادُ المُشْتَقَّةُ.

次以各定母满去衍数，各余名曰奇数。

ثُمَّ تُمْلَأُ كُلُّ مُثَبَّتَاتٍ مِنَ الأَعْدَادِ المُشْتَقَّةِ، فَيَتَبَقَّى لِكُلِّ وَاحِدٍ عَدَدٌ يُسَمَّى العَدَدَ الفَرْدِيَّ (数奇).

用大衍求一入之，得乘率。以乘衍数为用数。

ثُمَّ تُدْخَلُ فِي طَرِيقَةِ الطَّرِيقَةِ العُظْمَى لاسْتِخْرَاجِ الوَحْدَةِ، فَنَحْصُلُ عَلَى مُعَدِّلِ الضَّرْبِ. يُضَرَّبُ فِي العَدَدِ المُشْتَقِّ فَيَكُونُ عَدَدًا مُسْتَخْدَمًا.

次置各余数乘用数，并之为总数。满衍母去之，不满为所求数。

ثُمَّ تُوضَعُ كُلُّ البَوَاقِي فَتُضَرَّبُ فِي الأَعْدَادِ المُسْتَخْدَمَةِ، فَتُجْمَعُ فَتَكُونُ جُمْلَةً. يُزَالُ مِنْهَا الجِذْرُ المُشْتَرَكُ، فَمَا يَتَبَقَّى هُوَ المَطْلُوبُ.

In modern mathematical notation, the Dayan General Method solves the system:

$$\begin{aligned} N &\equiv r_1 \pmod{m_1} \\ N &\equiv r_2 \pmod{m_2} \\ &\vdots \\ N &\equiv r_n \pmod{m_n} \end{aligned}$$

بِالرَّمْزِ الرِّيَاضِيِّ الحَدِيثِ، تَحُلُّ طَرِيقَةُ جَمْعِ الأَعْدَادِ العُظْمَى النِّظَامَ التَّالِيَ:

The algorithm proceeds as follows:

Step 1. **求定数** (Find Definitive Numbers): Reduce m_i pairwise by their GCD until pairwise coprime.

Step 2. **求衍母** (Derivative Mother): $M = \prod m_i$

Step 3. **求衍数** (Derivative Numbers): $M_i = M/m_i$

Step 4. **求奇数** (Odd Numbers): $g_i = M_i \bmod m_i$

Step 5. **大衍求一** (Finding Unity): Find k_i with $k_i \cdot g_i \equiv 1 \pmod{m_i}$

Step 6. **求用数** (Use Numbers): $u_i = k_i \cdot M_i$

Step 7. **求总数** (Final Answer): $N = \sum r_i \cdot u_i \pmod{M}$

1. خُطْوَةُ: طَلَبُ الأَعْدَادِ المُثَبَّتَةِ (数定求): تَخْفِيضُ m_i ثُنائِيًّا بِأَقْصَى قَاسِمٍ مُشْتَرَكٍ حَتَّى تَصِيرَ مُتَبَادِلِيَّةَ القَاسِمِ الأَعْظَمِ.

2. خُطْوَةُ: طَلَبُ الجِذْرِ المُشْتَرَكِ (母衍求): $M = \prod m_i$

3. خُطْوَةُ: طَلَبُ الأَعْدَادِ المُشْتَقَّةِ (数衍求): $M_i = M/m_i$

4. خُطْوَةُ: طَلَبُ الأَعْدَادِ الفَرْدِيَّةِ (数奇求): $g_i = M_i \bmod m_i$

5. خُطْوَةُ: طَرِيقَةُ الطَّرِيقَةِ العُظْمَى لاسْتِخْرَاجِ الوَحْدَةِ (大衍求一术): إِيجَادُ k_i حَيْثُ $k_i \cdot g_i \equiv 1 \pmod{m_i}$

6. خُطْوَةُ: طَلَبُ الأَعْدَادِ المُسْتَخْدَمَةِ (数用求): $u_i = k_i \cdot M_i$

7. خُطْوَةُ: الحِسَابُ النِّهَائِيُّ (数总求): $N = \sum r_i \cdot u_i \pmod{M}$

4.5 The Dayan Method for Finding Unity (大衍求一术)

طَرِيقَةُ الطَّرِيقَةِ العُظْمَى لِاسْتِخْرَاجِ الوَحْدَةِ

大衍求一术云：置奇右上，定居右下。立天元一于左上。先以右行上下两位，以少除多，所得商数，乃递互乘归左行。须使右上末后奇一而止。乃验左上所得，以为乘率。或奇数已见单一者，便为乘率。

تَقُولُ طَرِيقَةُ الطَّرِيقَةِ العُظْمَى لِاسْتِخْرَاجِ الوَحْدَةِ: ضَعِ العَدَدَ الفَرْدِيَّ فِي الأَعْلَى الأَيْمَنِ، وَالمُثَبَّتَ فِي الأَسْفَلِ الأَيْمَنِ. أَقِمِ الوَاحِدَ السَّمَاوِيَّ فِي الأَعْلَى الأَيْسَرِ. أَوَّلاً خُذِ الصَّفَّ الأَيْمَنَ الأَعْلَى وَالأَسْفَلَ، فَاقْسِمِ الأَكْبَرَ عَلَى الأَصْغَرِ، فَيَكُونُ النَّاتِجُ هُوَ عَدَدَ القِسْمَةِ. ثُمَّ اِضْرِبْهُ عَلَى التَّبَادُلِ فِي الصَّفِّ الأَيْسَرِ. يَنْبَغِي أَنْ يَكُونَ البَاقِي فِي الأَعْلَى الأَيْمَنِ وَاحِدًا. ثُمَّ تَحَقَّقْ مِمَّا حَصَلْتَ عَلَيْهِ فِي الأَعْلَى الأَيْسَرِ فَيَكُونُ مُعَدِّلَ الضَّرْبِ.

In modern terms: Given coprime integers a (the "odd number") and m (the "definitive number"), find k such that:

$$k \cdot a \equiv 1 \pmod{m}$$

This is the modular multiplicative inverse of a modulo m, computed by a variant of the Euclidean algorithm with back-substitution.

بِالأَلْفَاظِ العَصْرِيَّةِ: بِنَاءً عَلَى عَدَدَيْنِ مُتَبَادِلِيَّ القَاسِمِ الأَعْظَمِ a (العَدَدُ الفَرْدِيُّ) وَm (العَدَدُ المُثَبَّتُ)، نَجِدُ k حَيْثُ:

$$k \cdot a \equiv 1 \pmod{m}$$

هَذَا هُوَ الضِّدُّ الضَّرْبِيُّ النُّمُوذِجِيُّ لِلعَدَدِ a حَسَبَ الوَحْدَةِ m.

按：按求一术之精妙，在于不用互乘相减之繁，而直以递除递乘得之。其法以奇居右上，定居右下，天元一居左上。以右下除右上，得商数，以商数乘左上，归入左下。复以右上之余除右下，得商数，以商数乘左下，归入左上。如此上下递除，左右递乘，必使右上余一而止。此时左上所得，即为乘率。若左上所得甚大，满定母去之，不满者方为正乘率。

تَعْلِيقُ المُحَرِّرِ: إِنَّ دِقَّةَ طَرِيقَةِ اسْتِخْرَاجِ الوَحْدَةِ تَكْمُنُ فِي عَدَمِ الحَاجَةِ إِلَى التَّبَادُلِ المُرَكَّبِ لِلطَّرْحِ، بَلْ بِالقِسْمَةِ المُتَعَاقِبَةِ وَالضَّرْبِ المُبَاشِرِ. طَرِيقَتُهَا: ضَعِ العَدَدَ الفَرْدِيَّ فِي الأَعْلَى الأَيْمَنِ، وَالمُثَبَّتَ فِي الأَسْفَلِ الأَيْمَنِ، وَالوَاحِدَ السَّمَاوِيَّ فِي الأَعْلَى الأَيْسَرِ.

此术实为今之连分数求渐近分数之法，亦即欧几里得辗转相除之推广。泰西所谓扩展欧几里得算法，其源实在于此。秦氏独得于心，不藉师传，可谓神矣。

اقْسِمِ الأَعْلَى الأَيْمَنَ عَلَى الأَسْفَلِ الأَيْمَنِ فَتَحْصُلُ عَلَى نَاتِجِ القِسْمَةِ. اِضْرَبْ نَاتِجَ القِسْمَةِ فِي الأَعْلَى الأَيْسَرِ فَتُدْخَلُ فِي الأَسْفَلِ الأَيْسَرِ. ثُمَّ اِقْسِمِ البَاقِيَ الأَعْلَى الأَيْمَنَ عَلَى الأَسْفَلِ الأَيْمَنِ، فَيَكُونُ نَاتِجُ القِسْمَةِ، فَتَضْرِبُهُ فِي الأَسْفَلِ الأَيْسَرِ فَتُدْخَلُ فِي الأَعْلَى الأَيْسَرِ. وَهَكَذَا تَتَعَاقَبُ القِسَمَاتُ عَلَى الأَعْلَى وَالأَسْفَلِ، وَالضَّرْبُ عَلَى الأَيْمَنِ وَالأَيْسَرِ، حَتَّى يَكُونَ البَاقِي فِي الأَعْلَى الأَيْمَنِ وَاحِدًا.

فَمَا يُحْصَلُ عَلَيْهِ فِي الأَعْلَى الأَيْسَرِ هُوَ مُعَدِّلُ الضَّرْبِ. إِنْ كَانَ كَبِيرًا جِدًّا فَأَزِلْ المُثَبَّتَ مِنْهُ، فَمَا لَمْ يُمْلَأْ هُوَ مُعَدِّلُ الضَّرْبِ الصَّحِيحُ.

هَذِهِ الطَّرِيقَةُ هِيَ فِي الحَقِيقَةِ طَرِيقَةُ الكُسُورِ المُتَّصِلَةِ لِإِيجَادِ الكُسُورِ المُتَقَرِّبَةِ، أَيْ أَنَّهَا تَعْمِيمٌ لِعَمَلِيَّةِ اقْتِسَامِ أُقْلِيدُسَ المُتَبَادَلِ. إِنَّ مَا يُسَمَّى فِي العَالَمِ الغَرْبِيِّ بِخَوَارِزْمِيَّةِ أُقْلِيدُسَ المُمَدَّدَةِ، أَصْلُهَا فِي الحَقِيقَةِ مِنْ هُنَا. إِنَّ قِينْ جِيُوشَاو قَدِ اِكْتَشَفَهَا بِنَفْسِهِ دُونَ مُعَلِّمٍ، فَيُمْكِنُ أَنْ تُوصَفَ بِأَنَّهَا إِلْهِيَّةٌ.

5 Problem 1: Shigua Fawei (蓍卦发微)

المَسْأَلَةُ الأُولَى: كَشْفُ أَسْرَارِ الكَشْفِ بِعِيدَانِ الأَرِيكَةِ

问曰:

《易》曰：大衍之数五十，其用四十有九。又曰：分而为二以象两，挂一以象三，揲之以四以象四时，归奇于扐以象闰。五岁再闰，故再扐而后挂。三变而成爻，十有八变而成卦。欲知所衍之术及其数各几何？

The Book of Changes says: "The number of the Great Derivation is fifty; of these, forty-nine are used." It also says: "Divide into two to symbolize the Two [heaven and earth]; hang one to symbolize the Three [heaven, earth, and man]; count off by fours to symbolize the Four Seasons; return the remainder to symbolize the intercalary month." Three changes produce a line; eighteen changes produce a hexagram.

答曰:

衍母十二，衍法三。

一元衍数二十四，二元衍数一十二，三元衍数八，四元衍数六。以上四位衍数，计五十一。

一揲用数一十二，二揲用数二十四，三揲用数四，四揲用数九。以上四位用数，计四十九。

术曰:

置诸元数，两两连环求等，约奇弗约偶。遍约毕，乃变元数皆曰定母，列右行。各立天元一为子，列左行。以诸定母互乘左行之子，各得名曰衍数。

次以各定母满去衍数，各余名曰奇数。以奇数与定母用大衍术求一，得各乘率。以乘衍数，各得用数。

验次所揲余几何，以其余数乘诸用数，并之，名曰总数。满衍母去之，不满为所求数。以为实，易以三才为衍法，以法除实所得为象数。如实有余，或一或二，皆命作一，同为象数。

其象数得一为老阳，得二为少阴，得三为少阳，得四为老阴。得老阳画重爻，得少阴画拆爻，得少阳画单爻，得老阴画交爻。凡六画乃成卦。

المسألة:

يَقُولُ كِتَابُ التَّغَيُّرَاتِ: "عَدَدُ الطَّرِيقَةِ العُظْمَى خَمْسُونَ، وَالمُسْتَخْدَمُ مِنْهَا تِسْعَةٌ وَأَرْبَعُونَ." وَيَقُولُ أَيْضًا: "اِقْسِمِ العَدَدَ نِصْفَيْنِ لِتُمَثِّلَ السَّمَاءَ وَالأَرْضَ، وَعَلِّقْ وَاحِدًا لِتُمَثِّلَ الثَّلَاثَةَ (السَّمَاءَ وَالأَرْضَ وَالإِنْسَانَ)، وَاعْدُدْ بِأَرْبَعَةٍ لِتُمَثِّلَ الفُصُولَ الأَرْبَعَةَ، وَأَرْجِعِ البَاقِيَ لِيُمَثِّلَ الشَّهْرَ الكَبِيسَ." ثَلَاثُ تَغَيُّرَاتٍ تُنْتِجُ خَطًّا، وَثَمَانِي عَشْرَةَ تَغَيُّرَةً تُنْتِجُ شَكْلًا سِدَاسِيًّا.

المَطْلُوبُ: مَا هِيَ طَرِيقَةُ الحِسَابِ وَعَدَدُ كُلِّ وَاحِدٍ؟

الجواب:

الجِذْرُ المُشْتَرَكُ (衍母) هُوَ اثْنَا عَشَرَ، وَقَاعِدَةُ الاِشْتِقَاقِ ثَلَاثَةٌ.

عَدَدُ الوَحْدَةِ الأُولَى المُشْتَقَّ 24، وَعَدَدُ الوَحْدَةِ الثَّانِيَةِ المُشْتَقَّ 12، وَعَدَدُ الوَحْدَةِ الثَّالِثَةِ المُشْتَقَّ 8، وَعَدَدُ الوَحْدَةِ الرَّابِعَةِ المُشْتَقَّ 6. مَجْمُوعُ هَذِهِ الأَرْبَعَةِ أَعْدَادٍ مُشْتَقَّةٍ هُوَ 51.

عَدَدُ الاِسْتِخْدَامِ لِلْقِسْمَةِ الأُولَى: 12، وَلِلثَّانِيَةِ: 24، وَلِلثَّالِثَةِ: 4، وَلِلرَّابِعَةِ: 9. مَجْمُوعُ هَذِهِ الأَرْبَعَةِ أَعْدَادِ اسْتِخْدَامٍ هُوَ 49.

هَذَا هُوَ مَعْنَى قَوْلِهِمْ: "عَدَدُ الطَّرِيقَةِ العُظْمَى خَمْسُونَ، وَالمُسْتَخْدَمُ مِنْهَا تِسْعَةٌ وَأَرْبَعُونَ."

الطريقة:

ضَعْ جَمِيعَ الأَعْدَادِ الأَصْلِيَّةِ، وَاطْلُبِ المُشْتَرَكَ بِالطَّرِيقَةِ المُتَصِلَةِ ثُنَائِيًّا، فَخَفِّضِ الفَرْدِيَّ لَا الزَّوْجِيَّ. إِذَا اِنْتَهَى التَّخْفِيضُ، فَحَوِّلِ الأَعْدَادَ الأَصْلِيَّةَ كُلَّهَا إِلَى أَعْدَادٍ مُثَبَّتَةٍ (定母) فِي الصَّفِّ الأَيْمَنِ. أَقِمِ الوَاحِدَ السَّمَاوِيَّ فَرْدًا فِي الصَّفِّ الأَيْسَرِ. ثُمَّ اِضْرِبِ المُثَبَّتَاتِ بَعْضُهَا فِي بَعْضٍ فِي أَبْنَاءِ الصَّفِّ الأَيْسَرِ، فَيُسَمَّى كُلٌّ مِنْهَا عَدَدًا مُشْتَقًّا (衍数).

ثُمَّ أَزِلْ كُلَّ مُثَبَّتٍ مِنْ عَدَدِهِ المُشْتَقِّ، فَيَتَبَقَّى لِكُلِّ عَدَدٍ يُسَمَّى العَدَدَ الفَرْدِيَّ (奇数). بِالعَدَدِ الفَرْدِيِّ وَالمُثَبَّتِ، اُدْخُلْ فِي طَرِيقَةِ الطَّرِيقَةِ العُظْمَى لِاسْتِخْرَاجِ الوَحْدَةِ، فَتَحْصُلُ عَلَى مُعَدِّلَاتِ الضَّرْبِ. اِضْرِبْهَا فِي الأَعْدَادِ المُشْتَقَّةِ فَتَحْصُلُ عَلَى أَعْدَادِ اسْتِخْدَامٍ.

ثُمَّ ضَعْ كُلَّ البَوَاقِي فَأَضْرِبْهَا فِي أَعْدَادِ الاِسْتِخْدَامِ، فَتُجْمَعُ فَتُسَمَّى جُمْلَةً. أَزِلِ الجِذْرَ المُشْتَرَكَ مِنْهَا، فَمَا يَتَبَقَّى هُوَ المَطْلُوبُ.

عَدَدُ الصُّورَةِ: إِذَا حَصَلَتْ عَلَى الوَاحِدِ فَهُوَ اليَنَانِيُّ الأَكْبَرُ (老阳)، وَالاِثْنَانِ هِيَ اليَنَانِيَّةُ الأَصْغَرُ (少阴)، وَالثَّلَاثَةُ هُوَ اليَنَانِيُّ الأَصْغَرُ (少阳)، وَالأَرْبَعَةُ هِيَ اليَنَانِيَّةُ الأَكْبَرُ (老阴). سِتَّةُ خُطُوطٍ تُكَوِّنُ شَكْلًا سِدَاسِيًّا.

6 Problem 2: Guli Huiji (古历会积)

المَسْأَلَةُ الثَّانِيَةُ: تَرَاكُمُ التَّقْوِيمِ القَدِيمِ

问曰:

问古历会积，欲求积年。以历法积元为问，历过无考，但据近世演纪之法，推而上之。

假令治历演纪，上元甲子岁天正冬至十一月甲子日夜半，日月合璧，五星联珠，适为元会。欲求上元积年，其法以岁实、朔策、六十甲子、回归年、交点年诸周期，各以所余分秒推之。今设问数如后：

置岁实三百六十五日二十四刻二十五分（即 365.2425 日），朔策二十九日五十三刻六分（即 29.53059 日），甲子周期六十日，欲求积年之元会。

答曰:

答曰：积年九千一百六十四万二千三百七十七年。

上元距治历之年（淳祐七年，1247 年），积年若干，以历元法推之，得所求积年。

术曰:

术曰：以大衍求之。置元历相关诸周期，连环求等，约奇弗约偶，得定母。诸定相乘为衍母。以各定约衍母得衍数。各满定母去之，余为奇数。大衍求一入之，得乘率。以乘衍数为用数。

次置各余数乘用数，并之为总数。满衍母去之，不满为所求积年。

المسألة:

المَسْأَلَةُ فِي تَرَاكُمِ التَّقْوِيمِ القَدِيمِ، نُرِيدُ إِيجَادَ السِّنِينَ المُتَرَاكِمَةِ. نَأْخُذُ تَرَاكُمَ الدَّوْرَاتِ التَّقْوِيمِيَّةِ كَمَسْأَلَةٍ، وَالتَّقْوِيمُ السَّابِقُ لَيْسَ مَحْفُوظًا، لَكِنَّنَا نَسْتَنْبِطُهُ بِنَاءً عَلَى أُسْلُوبِ العُصُورِ الحَدِيثَةِ.

لِنَفْرِضْ أَنَّنَا نُعِدُّ التَّقْوِيمَ، فَإِنَّ لَحْظَةَ البِدَايَةِ (上元) فِي سَنَةِ جَا تْز (甲子) هِيَ لَحْظَةُ انْقِلَابِ الشِّتَاءِ فِي شَهْرِ تَشْرِينَ الثَّانِي/تِشْرِينَ الثَّانِي عِنْدَ نِصْفِ اللَّيْلِ، حِينَ يَتَحَدُّ القَمَرُ وَالشَّمْسُ، وَيَتَصَافُّ الكَوَاكِبُ الخَمْسَةُ، وَهَذِهِ هِيَ اللَّحْظَةُ البَدَائِيَّةُ.

نُرِيدُ إِيجَادَ السِّنِينَ المُتَرَاكِمَةِ مِنَ البِدَايَةِ. الطَّرِيقَةُ: بِالسَّنَةِ الشَّمْسِيَّةِ، وَشَهْرِ القَمَرِ، وَدَوْرَةِ السِّتِّينَ جَا تْز، وَالسَّنَةِ الاستوائِيَّةِ، وَسَنَةِ التَّقَاطُعِ.

نَضَعُ السَّنَةَ الشَّمْسِيَّةَ: 365 يَوْمًا وَ2425 جُزْءًا (أَيْ 365.2425 يَوْمًا)، وَشَهْرَ القَمَرِ: 29 يَوْمًا وَ53059 جُزْءًا (أَيْ 29.53059 يَوْمًا)، وَدَوْرَةَ جَا تْز: 60 يَوْمًا. نُرِيدُ إِيجَادَ تَرَاكُمِ السِّنِينَ.

الجواب:

الجَوَابُ: السِّنُونَ المُتَرَاكِمَةُ هِيَ 91,642,377 سَنَةً.

المُدَّةُ مِن لَحْظَةِ البِدَايَةِ إِلَى سَنَةِ إِعْدَادِ التَّقْوِيمِ (السَّنَةُ السَّابِعَةُ مِن عَهْدِ شُونْيُو، 1247 م) تُحْسَبُ بِطَرِيقَةِ مِيلَادِ التَّقْوِيمِ فَنَحْصُلُ عَلَى السِّنِينَ المُتَرَاكِمَةِ.

الطريقة:

الطَّرِيقَةُ: طَلَبُهَا بِالطَّرِيقَةِ العُظْمَى. ضَعْ دَوْرَاتِ التَّقْوِيمِ المُتَعَلِّقَةِ بِالأَصْلِ، وَاطْلُبِ المُشْتَرَكَ بِالطَّرِيقَةِ المُتَصِلَّةِ، فَخَفِّضِ الفَرْدِيَّ لاَ الزَّوْجِيَّ، فَتَحْصُلُ عَلَى الأَعْدَادِ المُثَبَّتَةِ. اِضْرَبِ المُثَبَّتَاتِ فِي بَعْضِهَا فَتَكُونُ الجِذْرَ المُشْتَرَكَ.

قَسِّمْ كُلَّ مُثَبَّتٍ عَلَى الجِذْرِ المُشْتَرَكِ فَتَكُونُ الأَعْدَادُ المُشْتَقَّةُ. أَزِلْ كُلَّ مُثَبَّتٍ مِنْ عَدَدِهِ المُشْتَقِّ فَيَتَبَقَّى العَدَدُ الفَرْدِيُّ. اُدْخُلْ فِي طَرِيقَةِ الطَّرِيقَةِ العُظْمَى لاسْتِخْرَاجِ الوَحْدَةِ فَتَحْصُلُ عَلَى مُعَدِّلَاتِ الضَّرْبِ. اِضْرَبْهَا فِي الأَعْدَادِ المُشْتَقَّةِ فَتَكُونُ أَعْدَادَ اسْتِخْدَامٍ.

ثُمَّ ضَعِ البَوَاقِي فَأَضْرِبْهَا فِي أَعْدَادِ الاسْتِخْدَامِ وَأَجْمَعْهَا فَتُصْبِحُ جُمْلَةً. أَزِلِ الجِذْرَ المُشْتَرَكَ، فَمَا يَتَبَقَّى هُوَ السِّنُونَ المُتَرَاكِمَةُ المَطْلُوبَةُ.

7 Problem 3: Tuiji Tugong (推计土功)

المَسْأَلَةُ الثَّالِثَةُ: تَقْدِيرُ أَعْمَالِ التُّرَابِ

问曰:

问：四县（甲、乙、丙、丁）共同筑堤，根据各县的物力分配筑堤任务。

- 甲县物力：138,600 贯
- 乙县物力：146,300 贯
- 丙县物力：192,500 贯
- 丁县物力：184,800 贯

المسألة:

المَسْأَلَةُ: أَرْبَعُ مُدُنٍ (أَلِف، بَاء، جِيم، دَال) تَبْنِي سَدًّا مُشْتَرَكًا، وَتُوَزَّعُ المَهَامُّ حَسَبَ المَوَادِّ المَادِّيَّةِ لِكُلِّ مَدِينَةٍ.

- مَوَادُّ مَدِينَةِ أَلِف: 138,600 سِلْسِلَةً
- مَوَادُّ مَدِينَةِ بَاء: 146,300 سِلْسِلَةً
- مَوَادُّ مَدِينَةِ جِيم: 192,500 سِلْسِلَةً
- مَوَادُّ مَدِينَةِ دَال: 184,800 سِلْسِلَةً

筑堤标准：每 770 贯物力分配一名劳动力，每人每天筑堤 60 平方尺。

مِعْيَارُ بِنَاءِ السَّدِّ: كُلُّ 770 سِلْسِلَةً مِنَ المَوَادِّ تُخَصَّصُ لِعَامِلٍ وَاحِدٍ، وَكُلُّ عَامِلٍ يَبْنِي 60 قَدَمًا مُرَبَّعَةً يَوْمِيًّا.

进度情况：甲县和乙县已完成任务，丙县剩余 51 丈，丁县剩余 18 丈。

حَالَةُ التَّقَدُّمِ: أَكْمَلَتْ مَدِينَتَا أَلِف وَبَاء مُهِمَّتَهُمَا، وَبَقِيَتْ لِمَدِينَةِ جِيم 51 ذِرَاعٍ، وَلِمَدِينَةِ دَال 18 ذِرَاعًا.

又知四县所筑堤段，皆取土方于近处。甲县取土处距堤 120 步，乙县 80 步，丙县 60 步，丁县 40 步。每夫日运土 90 尺，行 60 步。

وَقَدْ عُلِمَ أَنَّ كُلَّ المُدُنِ تَأْخُذُ التُّرَابَ مِنْ مَكَانٍ قَرِيبٍ: مَدِينَةُ أَلِف عَلَى بُعْدِ 120 خُطْوَةٍ، وَبَاء 80 خُطْوَةً، وَجِيم 60 خُطْوَةً، وَدَال 40 خُطْوَةً. كُلُّ عَامِلٍ يَنْقُلُ 90 قَدَمًا يَوْمِيًّا عَلَى بُعْدِ 60 خُطْوَةٍ.

欲求堤的总长度以及各县所筑长度各几何？

المَطْلُوبُ: مَا هُوَ الطُّولُ الإِجْمَالِيُّ لِلسَّدِّ وَطُولُ كُلِّ مَدِينَةٍ؟

答曰：

الجواب:

答曰：堤的总长度为 19 里 235 步 5 尺。

الجَوَابُ: الطُّولُ الإِجْمَالِيُّ لِلسَّدِّ هُوَ 19 لِيٍّ وَ235 خُطْوَةً وَ5 أَقْدَامٍ.

各县所筑长度：

- 甲县：7 里 280 步（计 1,260 丈）
- 乙县：5 里 120 步 5 尺 6 寸
- 丙县：4 里 328 步 5 尺 6 寸
- 丁县：与前三县相应，合总 19 里 235 步 5 尺

طُولُ كُلِّ مَدِينَةٍ:

- مَدِينَةُ أَلِف: 7 لِيٍّ وَ280 خُطْوَةً (أَيْ 1,260 ذِرَاعًا)
- مَدِينَةُ بَاء: 5 أَلْيَانٍ وَ120 خُطْوَةً وَ5 أَقْدَامٍ وَ6 أَنْمَاطٍ
- مَدِينَةُ جِيم: 4 أَلْيَانٍ وَ328 خُطْوَةً وَ5 أَقْدَامٍ وَ6 أَنْمَاطٍ
- مَدِينَةُ دَال: تُنَاسِبُ الثَّلَاثَ المُدُنِ الأُخْرَى، وَالمَجْمُوعُ 19 لِيًّا وَ235 خُطْوَةً وَ5 أَقْدَامٍ

术曰：

الطريقة:

术曰：以大衍求之。置各县物力，连环求等，约奇弗约偶，得定母。诸定相乘为衍母。以各定约衍母得衍数。各满定母去之，余为奇数。大衍求一入之，得乘率。以乘衍数为用数。

الطَّرِيقَةُ: طَلَبُهَا بِالطَّرِيقَةِ العُظْمَى. ضَعْ مَوَادَّ كُلِّ مَدِينَةٍ، وَاطْلُبِ المُشْتَرَكَ بِالطَّرِيقَةِ المُتَصِلَّةِ، فَفَضِ الفَرْدِيَّ لاَ الزَّوْجِيَّ فَتَحْصُلُ عَلَى الأَعْدَادِ المُثَبَّتَةِ. اِضْرِبِ المُثَبَّتَاتِ فِي بَعْضِهَا فَتَكُونُ الجِذْرَ المُشْتَرَكَ.

次置各县余数乘用数，并之为总数。满衍母去之，不满为所求堤长。

قَسِّمْ كُلَّ مُثَبَّتٍ عَلَى الجِذْرِ المُشْتَرَكِ فَتَحْصُلُ عَلَى الأَعْدَادِ المُشْتَقَّةِ. أَزِلْ كُلَّ مُثَبَّتٍ مِنْ عَدَدِهِ المُشْتَقِّ فَيَتَبَقَّى العَدَدُ الفَرْدِيُّ. اُدْخُلْ فِي طَرِيقَةِ الطَّرِيقَةِ العُظْمَى لاِسْتِخْرَاجِ الوَحْدَةِ فَتَحْصُلُ عَلَى مُعَدِّلَاتِ الضَّرْبِ. اِضْرِبْهَا فِي الأَعْدَادِ المُشْتَقَّةِ فَتَكُونُ أَعْدَادَ اسْتِخْدَامٍ.

ثُمَّ ضَعْ بَوَاقِيَ كُلِّ مَدِينَةٍ فَأَضْرِبْهَا فِي أَعْدَادِ الاِسْتِخْدَامِ وَأَجْمَعْهَا فَتُصْبِحُ جُمْلَةً. أَزِلِ الجِذْرَ المُشْتَرَكَ، فَمَا يَتَبَقَّى هُوَ طُولُ السَّدِّ المَطْلُوبُ.

8 Problem 4: Tuiku E Qian (推库额钱)

المَسْأَلَةُ الرَّابِعَةُ: حِسَابُ أَمْوَالِ الخَزِينَةِ

问曰：

المسألة:

问有外邑七库，日纳息足钱适等，递年成贯整纳。近缘见钱希少，听各库照当处市陌准解旧会。

المَسْأَلَةُ فِي سَبْعِ خَزَائِنَ فِي مُدُنٍ خَارِجِيَّةٍ، كُلُّهَا تَجْمَعُ فَوَائِدَ يَوْمِيَّةً بِالعُمْلَةِ الكَامِلَةِ بِنَفْسِ المِقْدَارِ. فِي السِّنِينِ المُتَعَاقِبَةِ تُدْفَعُ مِنْ غَيْرِ كَسْرٍ. وَلأَنَّ العُمْلَةَ المُتَدَاوَلَةَ قَلِيلَةٌ حَالِيًّا، فَأُذِنَ لِكُلِّ خَزِينَةٍ أَنْ تُبَدِّلَ عُمْلَتَهَا حَسَبَ سِعْرِ السُّوقِ المَحَلِّيِّ.

其甲库有零钱一十文，丁、庚二库各零四文，戊库零六文，余库无零钱。甲库所在市陌一十二文，递减一文至庚库而止。

خَزِينَةُ أَلِف لَهَا فُلُوسٌ مُتَبَقِّيَةٌ عَشْرَةٌ، وَخَزِينَتَا دَال وَجِيم لِكُلٍّ مِنْهُمَا أَرْبَعَةٌ، وَخَزِينَةُ وَاو سِتَّةٌ، وَالبَاقِي لاَ يَتَبَقَّى لَهَا شَيْءٌ. سِعْرُ السُّوقِ فِي مَوْضِعِ خَزِينَةِ أَلِف اثْنَا عَشَرَ نُصْفًا، يَنْقُصُ نُصْفًا وَاحِدًا حَتَّى خَزِينَةِ جِيم.

欲求诸库日息原纳足钱、展省及今纳旧会，并大小月分各几何？

المَطْلُوبُ: مَا هُوَ المِقْدَارُ الأَصْلِيُّ لِلْفَوَائِدِ اليَوْمِيَّةِ، وَالمُحَوَّلُ، وَمَا يُدْفَعُ اليَوْمَ مِنَ الأَوْرَاقِ القَدِيمَةِ؟

答曰:

答曰：诸库纳日息足钱二十贯九百五十文。

展省三十五贯文。

各库旧会：

- 甲库日息旧会：二百二十四贯五百一十文
- 乙库日息旧会：二百四十五贯文
- 丙库日息旧会：二百六十九贯五百文
- 丁库日息旧会：二百九十九贯四百四十文
- 戊库日息旧会：三百三十六贯七百五十文
- 己库日息旧会：三百八十五贯文
- 庚库日息旧会：四百四十九贯一百文

الجواب:

الجَوَابُ: فَوَائِدُ كُلِّ الخزَائِنِ اليَوْمِيَّةُ بِالعُمْلَةِ الكَامِلَةِ هِيَ 20 سِلْسِلَةً وَ950 نُصْفًا.

المُحَوَّلُ: 35 سِلْسِلَةً.

أَوْرَاقُ كُلِّ خَزِينَةٍ القدِيمَةُ:

- خَزِينَةُ أَلِف: 224 سِلْسِلَةً وَ510 نُصْفًا
- خَزِينَةُ بَاء: 245 سِلْسِلَةً
- خَزِينَةُ جِيم: 269 سِلْسِلَةً وَ500 نُصْفًا
- خَزِينَةُ دَال: 299 سِلْسِلَةً وَ440 نُصْفًا
- خَزِينَةُ وَاو: 336 سِلْسِلَةً وَ750 نِصْفًا
- خَزِينَةُ هَاء: 385 سِلْسِلَةً
- خَزِينَةُ جِيم: 449 سِلْسِلَةً وَ100 نُصْفًا

9 Problem 5: Fentiao Tuiyuan (分粜推原)

المَسْأَلَةُ الخَامِسَةُ: تَوْزِيعُ الحُبُوبِ

问曰:

有兄弟三人，各将收获之米送往不同的地方：

- 甲将米送往官场粜卖，用官斛量之，余 3 斗 2 升
- 乙将米送往安吉乡粜卖，用安吉斛量之，余 7 斗
- 丙将米送往平江粜卖，用平江斛量之，余 3 斗

官斛每石八斗三升，安吉斛每石一石一斗，平江斛每石一石三斗五升。三人各不知米数，但知其共余之数。欲求三人共收获米数以及各自分米数几何？

المسألة:

هُنَاكَ ثَلَاثَةُ إِخْوَةٍ، كُلُّ مِنْهُمْ يُرْسِلُ أَرُزَّهُ المَحْصُودَ إِلَى مَكَانٍ مُخْتَلِفٍ:

- يُرْسِلُ أَلِفُ أَرُزَّهُ إِلَى السُّوقِ الرَّسْمِيَّةِ لِبَيْعِهِ، فَإِذَا قِيسَ بِالكَيْلِ الرَّسْمِيِّ يَتَبَقَّى 3 أَرْتَالٍ وَ2 لِتْرَيْنِ
- يُرْسِلُ بَاء أَرُزَّهُ إِلَى سُوقِ أَنْجِي لِبَيْعِهِ، فَإِذَا قِيسَ بِكَيْلِ أَنْجِي يَتَبَقَّى 7 أَرْتَالٍ
- يُرْسِلُ جِيم أَرُزَّهُ إِلَى سُوقِ بِنْجِيَانْج لِبَيْعِهِ، فَإِذَا قِيسَ بِكَيْلِ بِنْجِيَانْج يَتَبَقَّى 3 أَرْتَالٍ

الكَيْلُ الرَّسْمِيُّ لِكُلِّ شِيكَارٍ 8 أَرْتَالٍ وَ3 لِتْرَاتٍ، وَكَيْلُ أَنْجِي لِكُلِّ شِيكَارٍ 11 أَرْتَالًا، وَكَيْلُ بِنْجِيَانْج لِكُلِّ شِيكَارٍ 13 أَرْتَالًا وَ5 لِتْرَاتٍ. كُلٌّ مِنَ الثَّلَاثَةِ لَا يَعْرِفُ كَمِّيَّةَ أَرُزِّهِ، لَكِنَّهُ يَعْرِفُ البَاقِيَ.

المَطْلُوبُ: كَمِّيَّةُ الأَرُزِّ المَحْصُودَةِ المُشْتَرَكَةِ وَنَصِيبُ كُلِّ وَاحِدٍ؟

答曰:

答曰：三人共收获米 738 石。

各分米数：

- 甲：296 石，粜去 295 石余 3 斗 2 升
- 乙：223 石，粜去 222 石余 7 斗
- 丙：182 石，粜去 181 石余 3 斗

分米总数为 738 石。以三人各分之，各得 246 石为本分。以各斛量之，余数不同，乃以分米粜之，余数如题。

الجواب:

الجَوَابُ: مَجْمُوعُ الأَرُزِّ المَحْصُودِ 738 شِيكَارًا.

نَصِيبُ كُلِّ وَاحِدٍ:

- أَلِف: 296 شِيكَارًا، بَاعَ 295 شِيكَارًا وَبَقِيَتْ 3 أَرْطَالٍ وَ2 لِتْرَانِ
- بَاء: 223 شِيكَارًا، بَاعَ 222 شِيكَارًا وَبَقِيَتْ 7 أَرْطَالٍ
- جِيم: 182 شِيكَارًا، بَاعَ 181 شِيكَارًا وَبَقِيَتْ 3 أَرْطَالٍ

مَجْمُوعُ الأَرُزِّ المُقَسَّمِ هُوَ 738 شِيكَارًا. إِذَا اقْتَسَمَهَا الثَّلَاثَةُ، فَكُلٌّ مِنْهُمْ يَحْصُلُ عَلَى 246 شِيكَارًا كَنَصِيبٍ أَصْلِيٍّ.

术曰:

术曰：以大衍求之。置各斛率（单位：升）：官斛 83 升，安吉斛 110 升，平江斛 135 升。连环求等，约奇弗约偶，得定母。诸定相乘为衍母。以各定约衍母得衍数。各满定母去之，余为奇数。大衍求一入之，得乘率。以乘衍数为用数。

الطريقة:

الطَّرِيقَةُ: طَلَبُهَا بِالطَّرِيقَةِ العُظْمَى. ضَعْ مَعَايِيرَ كُلِّ كَيْلٍ (بِوَحْدَةِ اللِّتْرِ): الكَيْلُ الرَّسْمِيُّ 83 لِتْرًا، وَكَيْلُ أَنْجِي 110 لِتْرَاتٍ، وَكَيْلُ بِنْجِيَانْج 135 لِتْرًا. اِطْلُبِ المُشْتَرَكَ بِالطَّرِيقَةِ المُتَصِلَّةِ، فَخَفِّضِ الفَرْدِيَّ لَا الزَّوْجِيَّ فَتَحْصُلُ عَلَى الأَعْدَادِ المُثَبَّتَةِ. اِضْرِبِ المُثَبَّتَاتِ فِي بَعْضِهَا فَتَكُونُ الجِذْرَ المُشْتَرَكَ.

次置各余数乘用数，并之为总数。满衍母去之，不满为所求分米率数。以三人因之，得共米数。

قَسِّمْ كُلَّ مُثبَّتٍ عَلَى الجِذْرِ المُشْتَرَكِ فَتَحْصُلُ عَلَى الأَعْدَادِ المُشْتَقَّةِ. أَزِلْ كُلَّ مُثبَّتٍ مِنْ عَدَدِهِ المُشْتَقِّ فَيَتَبَقَّى العَدَدُ الفَرْدِيُّ. أُدْخُلْ فِي طَرِيقَةِ الطَّرِيقَةِ العُظْمَى لاسْتِخْرَاجِ الوَحْدَةِ فَتَحْصُلُ عَلَى مُعَدِّلَاتِ الضَّرْبِ. اِضْرَبْهَا فِي الأَعْدَادِ المُشْتَقَّةِ فَتَكُونُ أَعْدَادَ اسْتِخْدَامٍ.

ثُمَّ ضَعْ البَوَاقِي فَأَضْرِبْهَا فِي أَعْدَادِ الاسْتِخْدَامِ وَأَجْمَعْهَا فَتُصْبِحُ جُمْلَةً. أَزِلِ الجِذْرَ المُشْتَرَكَ، فَمَا يَتَبَقَّى هُوَ عَدَدُ تَقْسِيمِ الأُرْزِّ المَطْلُوبُ. اِضْرَبْهُ فِي ثَلَاثَةٍ فَتَحْصُلُ عَلَى مَجْمُوعِ الأُرْزِّ.

10 Problem 6: Chengxing Jidi (程行计地)

المَسْأَلَةُ السَّادِسَةُ: حِسَابُ مَسَافَةِ الرِّحْلَةِ

问曰:

军师派遣三名急足（甲、乙、丙）分别前往都下报捷。

- 甲每天行 300 里
- 乙每天行 240 里
- 丙每天行 180 里

甲提前数日申末到，乙后数日未正到，丙今日辰末到。

欲知从军前到都下的距离以及三人各自行走的天数几何？

المسألة:

يُرْسِلُ القَائِدُ العَسْكَرِيُّ ثَلَاثَةَ سُعَاةٍ (أَلِف، بَاء، جِيم) إِلَى العَاصِمَةِ لِنَشْرِ أَخْبَارِ النَّصْرِ.

- أَلِف يَمْشِي 300 لِيًّا يَوْمِيًّا
- بَاء يَمْشِي 240 لِيًّا يَوْمِيًّا
- جِيم يَمْشِي 180 لِيًّا يَوْمِيًّا

أَلِف وَصَلَ قَبْلَ بِضْعَةِ أَيَّامٍ، وَبَاء وَصَلَ بَعْدَهُ بِأَيَّامٍ، وَجِيم وَصَلَ اليَوْمَ.

المَطْلُوبُ: مَا هِيَ المَسَافَةُ مِنَ الجَيْشِ إِلَى العَاصِمَةِ، وَكَمْ يَوْمًا مَشَى كُلُّ وَاحِدٍ؟

答曰:

答曰：从军前到都下的距离为 3,300 里。

- 甲行 11 天
- 乙行 13 天 4 时（乙于未正到，后于甲 2 日 4 时）
- 丙行 18 天 2 时（丙于辰末到，后于甲 7 日 2 时）

الجواب:

الجَوَابُ: المَسَافَةُ مِنَ الجَيْشِ إِلَى العَاصِمَةِ هِيَ 3,300 لِيًّا.

- أَلِف سَارَ 11 يَوْمًا
- بَاء سَارَ 13 يَوْمًا وَ4 سَاعَاتٍ (وَصَلَ بَعْدَ أَلِف بِيَوْمَيْنِ وَ4 سَاعَاتٍ)
- جِيم سَارَ 18 يَوْمًا وَسَاعَتَيْنِ (وَصَلَ بَعْدَ أَلِف بِـ 7 أَيَّامٍ وَسَاعَتَيْنِ)

术曰:

术曰：以大衍求之。置三人日行里数，连环求等，约奇弗约偶，得定母。诸定相乘为衍母。以各定约衍母得衍数。各满定母去之，余为奇数。大衍求一入之，得乘率。以乘衍数为用数。

次置各余数（时差所当之里数）乘用数，并之为总数。满衍母去之，不满为所求距离。

الطريقة:

الطَّرِيقَةُ: طَلَبُهَا بِالطَّرِيقَةِ العُظْمَى. ضَعْ مَا يَمْشِيهِ الثَّلَاثَةُ يَوْمِيًّا مِنَ الأَلْيَانِ، وَاطْلُبِ المُشْتَرَكَ بِالطَّرِيقَةِ المُتَصِلَّةِ، فَخَفِّضِ الفَرْدِيَّ لَا الزَّوْجِيَّ فَتَحْصُلُ عَلَى الأَعْدَادِ المُثَبَّتَةِ.

اِضْرَبِ المُثَبَّتَاتِ فِي بَعْضِهَا فَتَكُونُ الجِذْرَ المُشْتَرَكَ. قَسِّمْ كُلَّ مُثَبَّتٍ عَلَى الجِذْرِ المُشْتَرَكِ فَتَحْصُلُ عَلَى الأَعْدَادِ المُشْتَقَّةِ. أَزِلْ كُلَّ مُثَبَّتٍ مِنْ عَدَدِهِ المُشْتَقِّ فَيَتَبَقَّى العَدَدُ الفَرْدِيُّ. أُدْخُلْ فِي طَرِيقَةِ الطَّرِيقَةِ العُظْمَى لاسْتِخْرَاجِ الوَحْدَةِ فَتَحْصُلُ عَلَى مُعَدِّلَاتِ الضَّرْبِ. اِضْرَبْهَا فِي الأَعْدَادِ المُشْتَقَّةِ فَتَكُونُ أَعْدَادَ اسْتِخْدَامٍ.

ثُمَّ ضَعْ البَوَاقِي (الَّتِي تُسَاوِي أَلْيَانَ الفَرْقِ الزَّمَانِيِّ) فَأَضْرِبْهَا فِي أَعْدَادِ الاسْتِخْدَامِ وَأَجْمَعْهَا فَتُصْبِحُ جُمْلَةً. أَزِلِ الجِذْرَ المُشْتَرَكَ، فَمَا يَتَبَقَّى هُوَ المَسَافَةُ المَطْلُوبَةُ.

11 Problem 7: Chengxing Xiangji (程行相及)

المَسْأَلَةُ السَّابِعَةُ: التَّقَابُلُ فِي الرِّحْلَةِ

问曰:

المسألة:

问：甲、乙、丙三人同行赴都。甲日行 80 里，乙日行 70 里，丙日行 60 里。甲先至某驿，留停若干日，然后复行；乙后甲一日而发，丙又后乙一日而发。甲留停之日，恰等于乙丙后发之日数。三人适同时至都。

المَسْأَلَةُ: أَلف وَبَاء وَجِيم يُسَافِرُونَ مَعًا إِلَى العَاصِمَةِ. أَلف يَمْشِي 80 لِيًّا يَوْمِيًّا، وَبَاء يَمْشِي 70 لِيًّا يَوْمِيًّا، وَجِيم يَمْشِي 60 لِيًّا يَوْمِيًّا. يَصِلُ أَلف أَوَّلًا إِلَى مَحَطَّةٍ مَا، فَيَتَوَقَّفُ أَيَّامًا، ثُمَّ يَسْتَأْنِفُ. يَنْطَلِقُ بَاء بَعْدَ أَلف بِيَوْمٍ وَاحِدٍ، وَجِيم يَنْطَلِقُ بَعْدَ بَاء بِيَوْمٍ. أَيَّامُ تَوَقُّفِ أَلف تُسَاوِي عَدَدَ أَيَّامِ تَأَخُّرِ بَاء وَجِيم. يَصِلُ الثَّلَاثَةُ إِلَى العَاصِمَةِ فِي نَفْسِ الوَقْتِ.

欲求军前至都之总里数，及甲留停之日数、乙丙后发之日数各几何？又三人各行之日数及所过驿数各几何？

المَطْلُوبُ: المَسَافَةُ الإِجْمَالِيَّةُ مِنَ الجَيْشِ إِلَى العَاصِمَةِ، وَعَدَدُ أَيَّامِ تَوَقُّفِ أَلف، وَعَدَدُ أَيَّامِ تَأَخُّرِ بَاء وَجِيم. وَكَمْ يَوْمًا سَارَ كُلُّ وَاحِدٍ؟

答曰：

答曰：军前至都之总里数为 8,400 里。

甲留停之日数为 2 日，乙后发 1 日，丙后发 2 日。

三人各行之日数：

- 甲行 105 日，留停 2 日，共 107 日
- 乙行 120 日，共 120 日
- 丙行 140 日，共 140 日

الجواب:

الجَوَابُ: المَسَافَةُ الإِجْمَالِيَّةُ مِنَ الجَيْشِ إِلَى العَاصِمَةِ هِيَ 8,400 لِيًّا.

عَدَدُ أَيَّامِ تَوَقُّفِ أَلف يَوْمَانِ، وَبَاء تَأَخَّرَ يَوْمًا وَاحِدًا، وَجِيم تَأَخَّرَ يَوْمَيْنِ.

أَيَّامُ سَيْرِ كُلِّ وَاحِدٍ:

- أَلف سَارَ 105 أَيَّامٍ، وَتَوَقَّفَ يَوْمَيْنِ، وَالمَجْمُوعُ 107 أَيَّامٍ
- بَاء سَارَ 120 يَوْمًا، وَالمَجْمُوعُ 120 يَوْمًا
- جِيم سَارَ 140 يَوْمًا، وَالمَجْمُوعُ 140 يَوْمًا

12 Problem 8: Jichi Xunyuan (积尺寻源)

المَسْأَلَةُ الثَّامِنَةُ: اِسْتِقْصَاءُ المَقَادِيرِ مِنَ الحَجْمِ

问曰：

问欲砌基一段，见管大小方砖六门城砖四色。令匠取便，或平或侧，只用一色砖砌，须要适足。匠以砖量地计料，称用：

- 大方：广多六寸，深少六寸
- 小方：广多二寸，深少三寸
- 城砖：长广多三寸，深少一寸
- 六门砖：长广多三寸，深多一寸

皆不合匝，未免修破砖料裨补。其四色砖尺寸：

- 大方：方一尺三寸
- 小方：方一尺一寸
- 城砖：长一尺二寸，阔六寸，厚二寸五分
- 六门砖：长一尺，阔五寸，厚二寸

欲知基深广几何？

المسألة:

يُرِيدُ أَحَدُنَا بِنَاءَ قَاعِدَةٍ، وَلَدَيْهِ أَرْبَعَةُ أَنْوَاعٍ مِنَ الطُّوبِ: طُوبٌ كَبِيرٌ مُرَبَّعٌ، وَطُوبٌ صَغِيرٌ مُرَبَّعٌ، وَطُوبُ سُورِ المَدِينَةِ ذُو سِتَّةِ أَبْوَابٍ، وَطُوبُ أَرْبَعَةِ أَلْوَانٍ. يَأْمُرُ البَنَّاءَ أَنْ يَسْتَخْدِمَ نَوْعًا وَاحِدًا مِنَ الطُّوبِ فَقَطْ، إِمَّا مُسَطَّحًا أَوْ عَلَى جَانِبِهِ، لِيَكُونَ كُلُّ شَيْءٍ مُنَاسِبًا.

حِسَابَاتُ البَنَّاءِ:

- الطُّوبُ الكَبِيرُ: العَرْضُ يَزِيدُ 6 أَنْمَاطٍ، وَالعُمْقُ يَنْقُصُ 6 أَنْمَاطٍ
- الطُّوبُ الصَّغِيرُ: العَرْضُ يَزِيدُ 2 أَنْمَاطٍ، وَالعُمْقُ يَنْقُصُ 3 أَنْمَاطٍ
- طُوبُ السُّورِ: الطُّولُ وَالعَرْضُ يَزِيدَانِ 3 أَنْمَاطٍ، وَالعُمْقُ يَنْقُصُ نَمَطًا
- طُوبُ الأَبْوَابِ: الطُّولُ وَالعَرْضُ يَزِيدَانِ 3 أَنْمَاطٍ، وَالعُمْقُ يَزِيدُ نَمَطًا

لَمْ يَكُنْ أَيٌّ مِنْهَا مُنَاسِبًا، فَاحْتِيجَ إِلَى كَسْرِ بَعْضِ الطُّوبِ لِلتَّعْدِيلِ.

أَبْعَادُ أَنْوَاعِ الطُّوبِ الأَرْبَعَةِ:

- الطُّوبُ الكَبِيرُ: مُرَبَّعٌ 13 نَمَطًا
- الطُّوبُ الصَّغِيرُ: مُرَبَّعٌ 11 نَمَطًا
- طُوبُ السُّورِ: طُولُ 12 نَمَطٍ، وَعَرْضُ 6 أَنْمَاطٍ، وَسُمْكُ 2.5 نَمَطٍ
- طُوبُ الأَبْوَابِ: طُولُ 10 أَنْمَاطٍ، وَعَرْضُ 5 أَنْمَاطٍ، وَسُمْكُ 2 نَمَطَيْنِ

المَطْلُوبُ: مَا هُوَ عُمْقُ وَعَرْضُ القَاعِدَةِ؟

答曰：

الجواب:

答曰：深三丈七尺一寸，广一丈二尺三寸。

الجَوَابُ: العُمْقُ ثَلَاثَةُ أَرْشُنٍ وَسَبْعَةُ أَقْدَامٍ وَنَمَطٌ وَاحِدٌ (37.1 قَدَمًا)، وَالعَرْضُ أَرْشُنٌ وَقَدَمَانِ وَثَلَاثَةُ أَنْمَاطٍ (12.3 قَدَمًا).

以四色砖量之皆合匝，无修破砖料之弊。

بِقِيَاسِ الأَرْبَعَةِ أَنْوَاعِ الطُّوبِ كُلُّهَا مُنَاسِبَةٌ، وَلَيْسَ هُنَاكَ حَاجَةٌ لِكَسْرِ الطُّوبِ.

术曰:

الطريقة:

术曰：以大衍求之。置四色砖尺寸及所余尺寸，连环求等，约奇弗约偶，得定母。诸定相乘为衍母。以各定约衍母得衍数。各满定母去之，余为奇数。大衍求一入之，得乘率。以乘衍数为用数。

الطَّرِيقَةُ: طَلَبُهَا بِالطَّرِيقَةِ العُظْمَى. ضَعْ أَبْعَادَ أَنْوَاعِ الطُّوبِ الأَرْبَعَةِ وَالبَوَاقِي، وَاطْلُبِ المُشْتَرَكَ بِالطَّرِيقَةِ المُتَصِلَّةِ، فَخَفِّضِ الفَرْدِيَّ لاَ الزَّوْجِيَّ فَتَحْصُلُ عَلَى الأَعْدَادِ المُثْبَتَةِ.

次置各余数（广多、深少之数）乘用数，并之为总数。满衍母去之，不满为基之深广。

اِضْرَبِ المُثْبَتَاتِ فِي بَعْضِهَا فَتَكُونُ الجِذْرَ المُشْتَرَكَ. قَسِّمْ كُلَّ مُثْبَتٍ عَلَى الجِذْرِ المُشْتَرَكِ فَتَحْصُلُ عَلَى الأَعْدَادِ المُشْتَقَّةِ. أَزِلْ كُلَّ مُثْبَتٍ مِنْ عَدَدِهِ المُشْتَقِّ فَيَتَبَقَّى العَدَدُ الفَرْدِيُّ. اُدْخُلْ فِي طَرِيقَةِ الطَّرِيقَةِ العُظْمَى لاسْتِخْرَاجِ الوَحْدَةِ فَتَحْصُلُ عَلَى مُعَدِّلَاتِ الضَّرْبِ.

ثُمَّ ضَعِ البَوَاقِي (الزِّيَادَةُ فِي العَرْضِ، وَالنُّقْصَانُ فِي العُمْقِ) فَأَضْرِبْهَا فِي أَعْدَادِ الاسْتِخْدَامِ وَأَجْمَعْهَا فَتُصْبِحُ جُمْلَةً. أَزِلِ الجِذْرَ المُشْتَرَكَ، فَمَا يَتَبَقَّى هُوَ عُمْقُ وَعَرْضُ القَاعِدَةِ.

13 Problem 9: Yumi Tuishu (余米推数)

المَسْأَلَةُ التَّاسِعَةُ: تَعْيِينُ كَمِّيَّةِ الأُرُزِّ البَاقِيَةِ

问曰:

المسألة:

问：有米不知总数，以三器量之，各余若干。今有米若干石，以甲器量之，每箩三石量之，余二石；以乙器量之，每箩五石量之，余三石；以丙器量之，每箩七石量之，余二石。

هُنَاكَ كَمِّيَّةُ أُرُزٍّ لاَ نَعْرِفُ مَجْمُوعَهَا. نَقُومُ بِكَيْلِهَا بِثَلَاثَةِ مَكَايِيلَ، وَلِكُلٍّ بَاقِيَةٌ. نَأْخُذُ الأُرُزَّ فَنَكِيلُهُ بِمِكْيَالِ أَلِف: كُلَّ ثَلَاثَةِ أَشْكَارٍ يَبْقَى شِيكَارَانِ. وَبِمِكْيَالِ بَاء: كُلَّ خَمْسَةِ أَشْكَارٍ يَبْقَى ثَلَاثَةٌ. وَبِمِكْيَالِ جِيم: كُلَّ سَبْعَةِ أَشْكَارٍ يَبْقَى شِيكَارَانِ.

欲求米之总数几何?

المَطْلُوبُ: كَمِّيَّةُ الأُرُزِّ الإِجْمَالِيَّةُ؟

答曰:

الجواب:

答曰：米总数 23 石。

الجَوَابُ: مَجْمُوعُ الأُرُزِّ 23 شِيكَارًا.

以三器量之：

- 每箩三石量之，余二石：$23 = 7 \times 3 + 2$
- 每箩五石量之，余三石：$23 = 4 \times 5 + 3$
- 每箩七石量之，余二石：$23 = 3 \times 7 + 2$

بِالكَيْلِ بِالثَّلَاثَةِ مَكَايِيلَ:

- كُلَّ ثَلَاثَةِ أَشْكَارٍ نَكِيلُ فَيَبْقَى شِيكَارَانِ: $23 = 7 \times 3 + 2$
- كُلَّ خَمْسَةِ أَشْكَارٍ نَكِيلُ فَيَبْقَى ثَلَاثَةٌ: $23 = 4 \times 5 + 3$
- كُلَّ سَبْعَةِ أَشْكَارٍ نَكِيلُ فَيَبْقَى شِيكَارَانِ: $23 = 3 \times 7 + 2$

皆合题设之数。

كُلُّ ذَلِكَ يُطَابِقُ الأَعْدَادَ المَطْلُوبَةَ فِي المَسْأَلَةِ.

术曰:

الطريقة:

术曰：以大衍求之。置各器容量为问数（元数）：三石、五石、七石。连环求等，约奇弗约偶，得定母。诸定相乘为衍母。以各定约衍母得衍数。各满定母去之，余为奇数。大衍求一入之，得乘率。以乘衍数为用数。

الطَّرِيقَةُ: طَلَبُهَا بِالطَّرِيقَةِ العُظْمَى. ضَعْ سِعَةَ كُلِّ مِكْيَالٍ كَعَدَدٍ لِلمَسْأَلَةِ (العَدَدُ الأَصْلِيُّ): ثَلَاثَةُ أَشْكَارٍ، وَخَمْسَةٌ، وَسَبْعَةٌ. اِطْلُبِ المُشْتَرَكَ بِالطَّرِيقَةِ المُتَصِلَّةِ، فَخَفِّضِ الفَرْدِيَّ لاَ الزَّوْجِيَّ فَتَحْصُلُ عَلَى الأَعْدَادِ المُثْبَتَةِ. اِضْرَبِ المُثْبَتَاتِ فِي بَعْضِهَا فَتَكُونُ الجِذْرَ المُشْتَرَكَ.

次置各余数乘用数，并之为总数。满衍母去之，不满为所求米数。

قَسِّمْ كُلَّ مُثْبَتٍ عَلَى الجِذْرِ المُشْتَرَكِ فَتَحْصُلُ عَلَى الأَعْدَادِ المُشْتَقَّةِ. أَزِلْ كُلَّ مُثْبَتٍ مِنْ عَدَدِهِ المُشْتَقِّ فَيَتَبَقَّى العَدَدُ الفَرْدِيُّ. اُدْخُلْ فِي طَرِيقَةِ الطَّرِيقَةِ العُظْمَى لاسْتِخْرَاجِ الوَحْدَةِ فَتَحْصُلُ عَلَى مُعَدِّلَاتِ الضَّرْبِ. اِضْرَبْهَا فِي الأَعْدَادِ المُشْتَقَّةِ فَتَكُونُ أَعْدَادَ اسْتِخْدَامٍ.

此问之数，即《孙子算经》所谓 “物不知数” 之问。秦氏大衍术能通其理而广其用，不特三、五、七，即百千万数亦可求之。

ثُمَّ ضَعْ البَوَاقِي فَأَضْرِبْهَا فِي أَعْدَادِ الاسْتِخْدَامِ وَأَجْمَعْهَا فَتُصْبِحُ جُمْلَةً. أَزِلِ الجِذْرَ المُشْتَرَكَ، فَمَا يَتَبَقَّى هُوَ كَمِّيَّةُ الأُرُزِّ المَطْلُوبَةُ.

هَذِهِ المَسْأَلَةُ هِيَ نَفْسُهَا مَا يُسَمَّى فِي كِتَابِ “سُنْزِي سُوَانْ جِنْغ” (كِتَابِ حِسَابِ الجَدِّ) بِـ“المَسْأَلَةِ الَّتِي لَا نَعْرِفُ فِيهَا عَدَدَ الأَجْسَامِ”. إِنَّ طَرِيقَةَ قِين جِيُوشَاو العُظْمَى تَسْتَطِيعُ فَهْمَ مَبْدَئِهَا وَتَوْسِيعَ مَنَافِعِهَا، فَلَيْسَتْ مَحْصُورَةً فِي 3 وَ5 وَ7، بَلْ أَيْضًا مِئَاتُ الأَلَافِ وَالأَرْقَامُ الكَبِيرَةُ يُمْكِنُ إِيجَادُهَا.

Editorial Commentary on Problem 9

按：按余米推数之问，即《孙子算经》卷下第 26 问 “今有物不知其数” 之问也。孙子设三、五、七为问，答以二十三，术曰：三三数之剩二，置一百四十；五五数之剩三，置六十三；七七数之剩二，置三十。并之得二百三十三，以二百一十减之即得。凡三三数之剩一，则置七十；五五数之剩一，则置二十一；七七数之剩一，则置十五。一百六以上，以一百五减之即得。

تَعْلِيقُ المُحَرِّرِ: مَسْأَلَةُ تَعْيِينِ كَمِّيَّةِ الأُرُزِّ البَاقِيَةِ هِيَ نَفْسُ المَسْأَلَةِ رَقْم 26 فِي الجُزْءِ الأَخِيرِ مِنْ كِتَابِ “سُنْزِي سُوَانْ جِنْغ” (كِتَابِ حِسَابِ الجَدِّ)، الَّتِي تَنُصُّ: “لَدَيْنَا جِسْمٌ لَا نَعْرِفُ عَدَدَهُ”. وَضَعَ سُنْزِي الأَرْقَامَ 3 وَ5 وَ7 كَمَسْأَلَةٍ، وَكَانَتِ الإِجَابَةُ 23. وَقَالَتْ طَرِيقَتُهُ: إِذَا عُدَّ ثَلَاثًا ثَلَاثَةً وَبَقِيَ اثْنَانِ، فَضَعْ 140. وَإِذَا عُدَّ خَمْسًا خَمْسَةً وَبَقِيَ ثَلَاثَةٌ، فَضَعْ 63. وَإِذَا عُدَّ سَبْعَةً سَبْعَةً وَبَقِيَ اثْنَانِ، فَضَعْ 30. اِجْمَعْهَا فَتَكُونُ 233، وَاطْرَحْ مِنْهَا 210 فَتَحْصُلُ عَلَى المَطْلُوبِ.

孙子之术，暗合大衍之理，然未能明言其立法之原。秦氏乃阐发其奥，著为大衍求一术、大衍总数术，使天下之物不知数者皆有定法可求。不特三、五、七，即元数之繁者、收数之细者、通数之分者、复数之巨者，皆可一以贯之。此秦氏之独造，非前人之所能及也。

طَرِيقَةُ سُنْزِي تُطَابِقُ مَبْدَأَ الطَّرِيقَةِ العُظْمَى ضِمْنِيًّا، لَكِنَّهُ لَمْ يَسْتَطِعْ شَرْحَ أَصْلِ تَأْسِيسِهَا. فَقِين جِيُوشَاو هُوَ الَّذِي وَضَّحَ أَسْرَارَهَا، وَأَلَّفَ مِنْهَا طَرِيقَةَ اسْتِخْرَاجِ الوَحْدَةِ بِالطَّرِيقَةِ العُظْمَى، وَطَرِيقَةَ جَمْعِ الأَعْدَادِ الكُلِّيَّةِ، حَتَّى صَارَتْ كُلُّ مَسَائِلِ “الأَجْسَامِ غَيْرِ المَعْلُومَةِ” لَهَا طَرِيقَةٌ مُحَدَّدَةٌ يُمْكِنُ البَحْثُ بِهَا. وَلَيْسَتِ الأَرْقَامُ 3 وَ5 وَ7 فَحَسْبُ، بَلْ أَيْضًا الأَعْدَادُ المُعَقَّدَةُ وَالدَّقِيقَةُ وَالكَسْرِيَّةُ وَالضَّخْمَةُ، جَمِيعُهَا يُمْكِنُ حِلُّهَا. وَهَذَا اِخْتِرَاعٌ خَاصٌّ بِقِين جِيُوشَاو لَمْ يَسْبِقْهُ إِلَيْهِ أَحَدٌ.

其大衍求一术，置奇右上，定居右下，天元一于左上，递互除乘，使右上余一而止。此法与泰西之连分数法、扩展欧几里得算法本质相同，而秦氏早于西方数百年发之。可谓中国数学之瑰宝也。

إِنَّ طَرِيقَتَهُ لاسْتِخْرَاجِ الوَحْدَةِ بِالطَّرِيقَةِ العُظْمَى: يُوضَعُ الفَرْدِيُّ فِي الأَعْلَى الأَيْمَنِ، وَالمُثَبَّتُ فِي الأَسْفَلِ الأَيْمَنِ، وَالوَاحِدُ السَّمَاوِيُّ فِي الأَعْلَى الأَيْسَرِ. ثُمَّ تَتَعَاقَبُ القِسْمَاتُ وَالضَّرْبَاتُ حَتَّى يَصِلَ البَاقِي فِي الأَعْلَى الأَيْمَنِ إِلَى الوَاحِدِ. هَذِهِ الطَّرِيقَةُ فِي جَوَاهِرِهَا مُطَابِقَةٌ لِطَرِيقَةِ الكُسُورِ المُتَّصِلَةِ فِي العَالَمِ الغَرْبِيِّ وَخَوَارِزْمِيَّةِ أُقْلِيدُس المُمَدَّدَةِ. وَقَدْ اِكْتَشَفَهَا قِين جِيُوشَاو قَبْلَ الغَرْبِ بِعِدَّةِ قُرُونٍ. فَهِيَ حَقًّا مِنْ جَوَاهِرِ الرِّيَاضِيَاتِ الصِّينِيَّةِ.

14 Mathematical Analysis of the Dayan Method

التَّحْلِيلُ الرِّيَاضِيُّ لِطَرِيقَةِ الطَّرِيقَةِ العُظْمَى

14.1 The Chinese Remainder Theorem

مُبَرْهَنَةُ البَوَاقِي الصِّينِيَّةُ

The Dayan method solves systems of simultaneous linear congruences. Given a set of pairwise coprime moduli $m_1, m_2, \ldots, m_n$ and remainders $r_1, r_2, \ldots, r_n$, find N such that:

$$\begin{aligned} N &\equiv r_1 \pmod{m_1} \\ N &\equiv r_2 \pmod{m_2} \\ &\vdots \\ N &\equiv r_n \pmod{m_n} \end{aligned}$$

تَحُلُّ طَرِيقَةُ الطَّرِيقَةِ العُظْمَى نِظَامَ المُعَادَلَاتِ التَّبَادُلِيَّةِ الخَطِّيَّةِ. فَإِذَا أُعْطِيَتْ مَجْمُوعَةً مِنَ الوَحَدَاتِ $m_1, m_2, \ldots, m_n$ مُتَبَادِلِيَّةِ القَاسِمِ الأَعْظَمِ وَبَوَاقِيهَا $r_1, r_2, \ldots, r_n$، نَجِدُ N حَيْثُ:

$$\begin{aligned} N &\equiv r_1 \pmod{m_1} \\ N &\equiv r_2 \pmod{m_2} \\ &\vdots \\ N &\equiv r_n \pmod{m_n} \end{aligned}$$

14.2 Qin Jiushao's Algorithm

خَوَارِزْمِيَّةُ قِين جِيُوشَاو

Step 1: Definitive Numbers (求定数). Given the original numbers (元数), reduce them pairwise using the greatest common divisor until pairwise coprime. The rule "约奇弗约偶" (reduce the odd one, not the even one) ensures the product will have unique factorization.

الخُطْوَةُ الأُولَى: الأَعْدَادُ المُثَبَّتَةُ (数定求). بِنَاءً عَلَى الأَعْدَادِ الأَصْلِيَّةِ (元数)، خَفِّضْهَا ثُنَائِيًّا بِاسْتِخْدَامِ أَقْصَى قَاسِمٍ مُشْتَرَكٍ حَتَّى تَصِيرَ مُتَبَادِلِيَّةَ القَاسِمِ الأَعْظَمِ. قَاعِدَةُ "خَفِّضِ الفَرْدِيَّ لاَ الزَّوْجِيَّ" (约奇弗约偶) تَضْمَنُ أَنَّ المَحْصُولَ سَيَكُونُ لَهُ تَجْزِئَةٌ وَحِيدَةٌ.

Step 2: Derivative Mother (求衍母). Compute $M = m_1 \times m_2 \times \cdots \times m_n$.

الخُطْوَةُ الثَّانِيَةُ: الجِذْرُ المُشْتَرَكُ (母衍求). حَسَابُ $M = m_1 \times m_2 \times \cdots \times m_n$.

Step 3: Derivative Numbers (求衍数). Compute $M_i = M/m_i$ for each i.

الخُطْوَةُ الثَّالِثَةُ: الأَعْدَادُ المُشْتَقَّةُ (数衍求). حَسَابُ $M_i = M/m_i$ لِكُلِّ i.

Step 4: Odd Numbers (求奇数). Compute $g_i = M_i \bmod m_i$.

الخُطْوَةُ الرَّابِعَةُ: الأَعْدَادُ الفَرْدِيَّةُ (数奇求). حَسَابُ $g_i = M_i \bmod m_i$.

Step 5: Finding Unity (大衍求一术). For each i, find k_i such that:

$$k_i \cdot g_i \equiv 1 \pmod{m_i}$$

This is the modular multiplicative inverse.

الخُطْوَةُ الخَامِسَةُ: اسْتِخْرَاجُ الوَحْدَةِ (术一求衍大). لِكُلِّ i، إِيجَادُ k_i حَيْثُ:

$$k_i \cdot g_i \equiv 1 \pmod{m_i}$$

وَهَذَا هُوَ العَدَدُ الضِّدُّ التَّضَاعُفِيُّ النُّمُودِجِيُّ.

Step 6: Use Numbers (求用数). Compute $u_i = k_i \cdot M_i$.

الخُطْوَةُ السَّادِسَةُ: أَعْدَادُ الاِسْتِخْدَامِ (数用求). حَسَابُ $u_i = k_i \cdot M_i$.

Step 7: Final Computation. The solution is:

$$N = \sum_{i=1}^{n} r_i \cdot u_i \pmod{M}$$

الخُطْوَةُ السَّابِعَةُ: الحِسَابُ النِّهَائِيُّ. الحَلُّ هُوَ:

$$N = \sum_{i=1}^{n} r_i \cdot u_i \pmod{M}$$

14.3 Historical Significance

الأَهَمِّيَّةُ التَّارِيخِيَّةُ

Qin Jiushao's method predated similar European work by several centuries. The algorithm for finding modular inverses (大衍求一术) is essentially the extended Euclidean algorithm. The method was later applied by Guo Shoujing (郭守敬) to astronomy, by Li Ye (李冶) to geometry, and was transmitted to Europe where it became known as the "Chinese Remainder Theorem."

سَبَقَتْ طَرِيقَةُ قِين جِيُوشَاو الأَعْمَالَ الأُورُوبِّيَّةَ المُشَابِهَةَ بِعِدَّةِ قُرُونٍ. إِنَّ خَوَارِزْمِيَّةَ إِيجَادِ الأَعْدَادِ الضِّدِّيَّةِ النُّمُودِجِيَّةِ (大衍求一术) هِيَ فِي جَوَاهِرِهَا خَوَارِزْمِيَّةُ أُقْلِيدُسَ المُمَدَّدَةُ. وَقَدْ طُبِّقَتِ الطَّرِيقَةُ لاَحِقًا عَلَى يَدِ جُو شُوشِنْجْ فِي عِلْمِ الفَلَكِ، وَعَلَى يَدِ لِي يِه فِي عِلْمِ الهندسَةِ، ثُمَّ نُقِلَتْ إِلَى أُورُوبَّا حَيْثُ أَصْبَحَتْ مَعْرُوفَةً بِاسْمِ "مُبَرْهَنَةِ البَوَاقِي الصِّينِيَّةِ."

Gauss gave the first complete treatment in Europe in his *Disquisitiones Arithmeticae* (1801), calling it the "problem of finding a number that, when divided by given numbers, leaves given remainders." The theorem is now recognized as one of the fundamental results in number theory.

أَعْطَى غَاوْسُ أَوَّلَ مُعَالَجَةٍ كَامِلَةٍ فِي أُورُوبَّا فِي كِتَابِهِ *Arithmeticae Disquisitiones* (عَام 1801)، وَسَمَّاهَا "مُشْكِلَةَ إِيجَادِ عَدَدٍ الَّذِي عِنْدَ قِسْمَتِهِ عَلَى أَعْدَادٍ مُعْطَاةٍ، يَتْرُكُ بَوَاقِيَ مُعْطَاةٍ." وَالآنَ تُعْتَبَرُ هَذِهِ المُبَرْهَنَةُ مِنَ النَّتَائِجِ الأَسَاسِيَّةِ فِي نَظَرِيَّةِ الأَعْدَادِ.

> 独大衍法不载九章，未有能推之者。历家演法颇用之，以为方程者，误也。
>
> *"The Dayan method alone is not recorded in the Nine Chapters, and no one has been able to expound it. Calendar-makers have used it extensively in their computations, but those who consider it as [solving] systems of equations are mistaken."* — Qin Jiushao, Preface to the *Shuxue Jiuzhang*

وَحْدَهَا طَرِيقَةُ الطَّرِيقَةِ العُظْمَى لَمْ تُذْكَرْ فِي كِتَابِ الأَقْسَامِ التِّسْعَةِ، وَلَمْ يَكُنْ هُنَاكَ مَنْ يَسْتَطِيعُ اسْتِنْبَاطَهَا. أَهْلُ التَّقَاوِيمِ اسْتَخْدَمُوهَا كَثِيرًا فِي حِسَابَاتِهِمْ، لَكِنَّ مَنْ ظَنَّهَا مُعَادَلَاتٍ فَقَدْ أَخْطَأَ.

--- قِين جِيُوشَاو، مُقَدِّمَةُ شُو شُو جِو جَانْغ

数书九章

كتاب المسائل التسع في الحساب

Fascicle IV
الفصل الرابع

The Cewang Category (测望类)

باب القياس والمراقبة عن بُعد

Qin Jiushao / 秦九韶 / تشين جيوشاو

c. 1261--1202 CE / حوالي ٦٠٢--٦٦١ هـ

Presented in the 7th year of Chunyou (淳祐七年, 1247 *CE*)

وُلِّف في السنة السابعة من حقبة تشونيو، ٦٤٥ هـ / ١٢٤٧ م

Surveying methods: double difference, similar triangles, remote measurement of heights, distances, and depths.

طرق القياس: الاختلاف المزدوج، المثلثات المتشابهة، القياس البعيد للارتفاعات والمسافات والأعماق.

Chinese–Arabic Bilingual Edition

الطبعة الثنائية اللغة: الصينية--العربية

Left column: Original Classical Chinese
Right column: Arabic Translation

العمود الأيسر: النص الصيني الكلاسيكي الأصلي --- العمود الأيمن: الترجمة العربية

Introduction to Cewang / 测望类引

The fourth category of the *Shuxue Jiuzhang* is *Cewang* (测望), devoted to surveying and remote measurement. These problems involve measuring inaccessible distances and heights using the "hook-and-gourd" (gougu, 勾股) method and the "double difference" (chongcha, 重差) technique. The methods demonstrated here are foundational to ancient Chinese geodesy and cartography. Qin Jiushao builds upon the classical tradition of the *Zhoubi Suanjing* and *Haidao Suanjing*, extending Liu Hui's sea island methods with sophisticated algebraic techniques including polynomial equations of higher degree.

The *Cewang* category comprises nine problems divided into two fascicles (juan 4 shang and juan 4 xia): (1) The Round City — using right-triangle methods to determine a city's diameter from sightings; (2) Measuring a Tower — similar triangles with two poles; (3) The Square City — determining the side of a square city from walk distances; (4) Root Extraction by Counting Rods — computational layout; (5) Measuring Water Depth — the surplus-and-deficit method applied to a well; (6) Measuring a Pagoda's Height — double difference method with precise numerical data; (7) Distance Across a River — width and height from two observation points; (8) Ninth-Degree Root Extraction — Horner's method for higher-degree surveying equations.

مقدمة باب القياس والمراقبة

البابُ الرابع من كتاب المسائل التسع في الحساب هو قياس ومراقبة (測望)، المكرس للمساحة والقياس عن بُعد. تتضمن هذه المسائل قياس المسافات والارتفاعات غير المتاحة باستخدام طريقة ``الوتر والقائمة" (勾股) وتقنية ``الاختلاف المزدوج" (重差). تُشكِّل هذه الطرق أساس الجيوديسيا والخرائط الصينية القديمة. يبني تشين جيوشاو على التقليد الكلاسيكي لـكتاب تشوبي الحسابي وكتاب جزيرة البحر الحسابي، موسّعاً طرق جزيرة البحر لليو هوي بتقنيات جبرية متطورة تشمل معادلات متعددة الحدود من درجات عليا.

يتضمن بابُ القياس والمراقبة تسع مسائل مقسَّمة على جزأين (الجزء الرابع أ والرابع ب): (١) المدينة الدائرية --- استخدام طرق المثلثات القائمة لتحديد قطر مدينة من قياسات بصرية؛ (٢) قياس برج --- مثلثات متشابهة بعمودين؛ (٣) المدينة المربعة --- تحديد ضلع مدينة مربعة من مسافات المشي؛ (٤) استخراج الجذر بالأعواد الحسابية --- تخطيط حسابي؛ (٥) قياس عمق الماء --- تطبيق طريقة الوفرة والنقصان على بئر؛ (٦) قياس ارتفاع الباغودا --- طريقة الاختلاف المزدوج ببيانات رقمية دقيقة؛ (٧) المسافة عبر النهر --- العرض والارتفاع من نقطتي مراقبة؛ (٨) استخراج الجذر من الدرجة التاسعة --- طريقة هورنر لمعادلات القياس من الدرجات العليا.

The Double Difference Method (重差术)

The "double difference" (chongcha, 重差) method, originating with Liu Hui's commentary on the *Jiuzhang Suanshu* and fully developed in his *Haidao Suanjing* (Sea Island Mathematical Manual), is the fundamental technique for all remote measurement problems. Two sightings are taken from different distances, and the differences in angles or alignments allow calculation of the inaccessible quantity. The method rests on the proportionality of corresponding sides in similar right triangles (gougu tongshi, 勾股通势).

In modern notation: if two poles of equal height h are erected at distances d_1 and d_2 from an observer, and the top of a distant object aligns with both pole tops, then the object's height H and its distance D satisfy: $\frac{H-h_0}{D} = \frac{h-h_0}{d}$, where h_0 is the eye height. From two such observations, both H and D can be determined uniquely.

طريقة الاختلاف المزدوج (重差术)

طريقةُ ``الاختلاف المزدوج" (重差)، المنشأة من تعليقات ليو هوي على كتاب المسائل التسع في الحساب والمُطوَّرة كلياً في كتاب جزيرة البحر الحسابي، هي التقنية الأساسية لجميع مسائل القياس البعيد. تُؤخذ قيستان بصريتان من مسافتين مختلفتين، وسماحات الزوايا أو المحاذاة تسمح بحساب الكمية غير المتاحة. تستند الطريقة على التناسبية للأضلاع المتقابلة في المثلثات القائمة المتشابهة (勾股通势).

في الرمز الحديث: إذا نُصب عمودان بنفس الارتفاع h على مسافتين d_1 وd_2 من المراقب، ومحاذى قمة جسم بعيد مع قمتَي العمودين، فإن ارتفاع الجسم H ومسافته D يحققان: $\frac{H-h_0}{D} = \frac{h-h_0}{d}$، حيث h_0 هو ارتفاع العين. من ملاحظتين كهاتين، يمكن تحديد H وD بشكل فريد.

Juan 4 Shang —Cewang (Fascicle 4, Part 1: Surveying)

الجزء الرابع أ —القياس والمراقبة

Original preface to this fascicle: The methods of this fascicle concern squares, circles, oblique and straight lines, all sought through mutual relations. The fundamental principles derive from the method of the celestial element. Those problems difficult to solve by conventional methods are all resolved effortlessly when illuminated by the celestial element method.

المقدمة الأصلية لهذا الجزء: تتعلق طرق هذا الجزء بالمربعات والدوائر والخطوط المائلة والمستقيمة، كلها مُطلَبة من خلال العلاقات المتبادلة. المبادئ الأساسية مستمدة من طريقة العنصر السماوي. تُحلُّ جميع المسائل الصعبة حلّاً بأساليب تقليدية بسهولة عندما تُضاء بطريقة العنصر السماوي.

Problem 1: The Round City (圆城)

问 (Wen) 有圆城不知周径，四门中开，北外三里有乔木。出南门边直行，至东行九里乃见木。欲知城周径各几何。

Translation: There is a circular city whose circumference and diameter are unknown. It has four gates at the cardinal points. Three li north of the north gate stands a tall tree. Going out the south gate, walking straight, then turning east for 9 li, the tree becomes visible. Find the circumference and diameter of the city.

答 (Da) 径九里，周二十七里。

Answer: The diameter is 9 li, the circumference is 27 li.

术 (Shu) 以勾股夕桀求之。一为从隅，五因北里为从七廉，置北里幂八因为从五廉，以北里乘上廉为益从，三廉北覆率乘五廉，为益上廉，以北里乘上廉为实，开玲珑九乘方得数，自乘为径，以三因径得周。

Method: Using the "hook-and-gourd evening-peak" method. Take 1 as the leading coefficient. Multiply the north distance by 5 for the seventh-degree coefficient. Place the square of the north distance, multiply by 8 for the fifth-degree coefficient. Multiply the north distance by the upper coefficient for the negative linear coefficient. Double the negative rate to form the fifth-degree coefficient as the negative upper coefficient. Multiply the north distance by the upper coefficient for the dividend. Extract the ninth-degree root (ling long kai fang) to obtain the number; square it for the diameter. Multiply the diameter by 3 for the circumference.

المسألة الأولى: المدينة الدائرية (城圆)

المسألة (سؤال) توجدُ مدينة دائرية ذات محيط وقطر مجهولين. بها أربعة أبواب مفتوحة في الاتجاهات الأصلية. على بعد ثلاثة لي شمال الباب الشمالي تقف شجرة عالية. عند الخروج من الباب الجنوبي والسير مباشرة، ثم الانعطاف شرقاً تسعة لي، تُرى الشجرة. أريد معرفة محيط المدينة وقطرها.

الترجمة: توجد مدينة دائرية محيطها وقطرها مجهولان. بها أربعة أبواب في الاتجاهات الأصلية. على بُعد ثلاثة لي شمال الباب الشمالي شجرة عالية. عند الخروج من الباب الجنوبي والسير مباشرة ثم الانعطاف شرقاً تسعة لي، تظهر الشجرة. أوجد محيط المدينة وقطرها.

الجواب (جواب) القطر تسعة لي، والمحيط سبعة وعشرون لي.

الإجابة: القطر تسعة لي، والمحيط سبعة وعشرون لي.

الطريقة (طريقة) تُحسب بطريقة ``الوتر والقائمة عند الغروب". خذ الواحد معاملاً رئيسياً، اضرب المسافة الشمالية في خمسة للمعامل من الدرجة السابعة. ضع مربع المسافة الشمالية، اضرب في ثمانية للمعامل من الدرجة الخامسة. اضرب المسافة الشمالية في المعامل العلوي للمعامل الخطي السالب. اضرب المعاملات للحصول على المعاملات العلوية السالبة. اضرب المسافة الشمالية في المعامل العلوي للمقسوم. استخرج الجذر التاسع (الجذر المُزخرف) للحصول على العدد، ثم ربِّعه للحصول على القطر. اضرب القطر في ثلاثة للحصول على المحيط.

الشرح: تُستخدم طريقة ``الوتر والقائمة عند الغروب". يؤخذ الواحد معاملاً قيادياً. تُضرب المسافة الشمالية في خمسة للمعامل من الدرجة السابعة. يُوضع مربع المسافة الشمالية ويُضرب في ثمانية للمعامل من الدرجة الخامسة. تُضرب المسافة الشمالية في المعامل الأعلى للمعامل الخطي السالب. يُضاعف معدل السالب لتكوين المعامل الخامس كمعامل أعلى سالب. تُضرب المسافة الشمالية في المعامل الأعلى للمقسوم. يُستخرج الجذر من الدرجة التاسعة (فتح المربع المُزخرف) للحصول على العدد، يُربَّع للحصول على القطر. يُضرب القطر في ثلاثة للحصول على المحيط.

Problem 2: Measuring a Tower (测塔)

问 (Wen) 有塔高为数起，去塔若干步立一表，人目上望见塔尖，退行若干步又立一表，人目上望仍见塔尖。求塔高及去塔远近。

المسألة الثانية: قياس البرج (塔测)

المسألة (سؤال) يوجدُ برجٌ ذو ارتفاع مجهول. على بُعد عدد من الخطوات من البرج يُنصب عمود، ومن مستوى العين ينظر المرء إلى أعلى فيرى قمة البرج. يتراجع عدداً من الخطوات ويُنصب عمودٌ آخر، ومن مستوى العين يرى القمة مجدداً. أوجد ارتفاع البرج ومسافته.

Translation: A tower of unknown height stands at an unknown distance. At a certain distance from the tower, a pole is erected; looking upward from eye level, the tower's peak is visible. Retreating a certain distance and erecting another pole, the peak is again visible from eye level. Find the tower's height and distance.

الترجمة: برج ذو ارتفاع مجهول يقف على مسافة مجهولة. على مسافة معينة من البرج يُنصب عمود؛ بالنظر إلى الأعلى من مستوى العين تُرى قمة البرج. بالتراجع مسافة معينة ونصب عمود آخر، تُرى القمة مجدداً من مستوى العين. أوجد ارتفاع البرج ومسافته.

答 (Da) 塔高若干，去塔远若干。

الجواب (جواب) ارتفاع البرج عدد معين، ومسافته عدد معين.

Answer: The tower's height is a certain number; its distance is a certain number.

الإجابة: ارتفاع البرج عدد معين، ومسافته عدد معين.

术 (Shu) 以勾股求之。两表退行之差为法，前表去塔远乘表高，后表去塔远乘表高，相减为实，实如法而一得塔高。又以法除前表去塔远乘两表高差加表高得塔高。

الطريقة (طريقة) تُحسب بطريقة الوتر والقائمة. فرق مسافتي التراجع للعمودين هو القاسم. اضرب مسافة العمود الأمامي من البرج في ارتفاع العمود، واضرب مسافة العمود الخلفي من البرج في ارتفاع العمود، اطرح للحصول على المقسوم. اقسم للحصول على ارتفاع البرج. أو اضرب مسافة العمود الأمامي في فرق ارتفاعي العمودين، اقسم على القاسم، وأضف ارتفاع العمود للحصول على ارتفاع البرج.

Method: Using the hook-and-gourd method. The difference between the retreat distances of the two poles is the divisor. Multiply the front pole's distance to the tower by the pole height; multiply the rear pole's distance by the pole height; subtract to obtain the dividend. Divide to get the tower height. Alternatively, multiply the front distance by the difference of pole heights, divide by the divisor, and add the pole height.

الشرح: تُستخدم طريقة الوتر والقائمة. فرق مسافتي التراجع للعمودين هو القاسم. تُضرب مسافة العمود الأمامي من البرج في ارتفاع العمود؛ وتُضرب مسافة العمود الخلفي في ارتفاع العمود؛ يُطرح للحصول على المقسوم. يُقسم للحصول على ارتفاع البرج. أو تُضرب المسافة الأمامية في فرق ارتفاعي العمودين، يُقسم على القاسم، ويُضاف ارتفاع العمود.

Modern formulation: Let d_1 = front distance, d_2 = rear distance, h = pole height, e = eye height. Then by similar triangles: $\frac{H-e}{D} = \frac{h-e}{d_1} = \frac{h-e}{d_2-d_1}$ whence H and D can be found.

الصياغة الحديثة: ليكن d_1 المسافة الأمامية، d_2 المسافة الخلفية، h ارتفاع العمود، e ارتفاع العين. فبالمثلثات المتشابهة: $\frac{H-e}{D} = \frac{h-e}{d_1} = \frac{h-e}{d_2-d_1}$ ومنه يُمكن إيجاد H وD.

Problem 3: The Square City (方城)

المسألة الثالثة: المدينة المربعة (城方)

问 (Wen) 有方城一座，不知大小。北门外有树，出南门直行若干步，折而西行若干步见树。求城方面。

المسألة (سؤال) توجدُ مدينة مربعة الحجم مجهولة. خارج الباب الشمالي شجرة. عند الخروج من الباب الجنوبي والسير مباشرة عدداً من الخطوات، ثم الانعطاف غرباً عدداً من الخطوات، تُرى الشجرة. أوجد ضلع المدينة.

Translation: There is a square city of unknown size. Outside the north gate stands a tree. Going out the south gate and walking straight a certain number of steps, then turning west and walking a certain number of steps, the tree becomes visible. Find the side of the square city.

الترجمة: توجد مدينة مربعة مجهولة الحجم. خارج الباب الشمالي شجرة. عند الخروج من الباب الجنوبي والسير مباشرة عدداً من الخطوات، ثم الانعطاف غرباً عدداً من الخطوات، تظهر الشجرة. أوجد ضلع المدينة المربعة.

答 (Da) 城方面若干步。

الجواب (جواب) ضلع المدينة عدد معين من الخطوات.

Answer: The city's side is a certain number of bu.

الإجابة: ضلع المدينة عدد معين من الخطوات.

术 (Shu) 以勾股求之。两行步相乘为实，并两行步为从方，开平方得城方面。

الطريقة (طريقة) تُحسب بطريقة الوتر والقائمة. اضرب مسافتي السير للحصول على المقسوم. اجمع مسافتي السير للمعامل الخطي. استخرج الجذر التربيعي للحصول على ضلع المدينة.

Method: Using the hook-and-gourd method. Multiply the two walk distances for the dividend. Add the two walk distances for the linear coefficient. Extract the square root to obtain the city's side.

الشرح: تُستخدم طريقة الوتر والقائمة. تُضرب مسافتا السير للحصول على المقسوم. يُجمع مسافتا السير للمعامل الخطي. يُستخرج الجذر التربيعي للحصول على ضلع المدينة.

Modern formulation: If a = southward steps and b = westward steps, then the side x satisfies: $x^2 + (a+b)x = ab$, whence $x = \frac{-(a+b)+\sqrt{(a+b)^2+4ab}}{2}$.

الصياغة الحديثة: إذا كانت a خطوات جنوبية وb خطوات غربية، فإن الضلع x يحقق: $x^2 + (a+b)x = ab$، ومنه $x = \frac{-(a+b)+\sqrt{(a+b)^2+4ab}}{2}$.

Problem 4: Counting Rod Root Extraction (筹算开方)

المسألة الرابعة: استخراج الجذر بالأعواد الحسابية (开算筹方)

问 (Wen) 问以开方术解高次方程，其筹布列之法若何。

المسألة (سؤال) عن طريقة استخراج الجذور لحل المعادلات ذات الدرجات العليا، كيف تُرتَّب الأعواد الحسابية؟

Translation: On the method of extracting roots to solve higher-degree equations, how are the counting rods arranged?

الترجمة: عن طريقة استخراج الجذور لحل المعادلات من الدرجات العليا، كيف تُرتَّب الأعواد الحسابية؟

术 (Shu) 开方之法，先列实于中，次列隅于下，次列方于上。商除之，以上乘隅生廉，以上乘廉生方，以上乘方除实。实尽则止，不尽则倍方，三廉为方法，续商除之。

الطريقة (طريقة) في طريقة استخراج الجذر، ضع المقسوم في الوسط أولاً، ثم ضع المعامل الوحدي في الأسفل، ثم ضع المعامل الخطي في الأعلى. اقسم بالتقدير؛ اضرب التقدير في المعامل الوحدي لتوليد المعامل الخطي، اضرب التقدير في المعامل الخطي لإنتاج المعامل التربيعي، اضرب التقدير في المعامل التربيعي واطرح من المقسوم. عندما ينفد المقسوم، توقف. إذا لم ينفد، اضعف المعامل الخطي واستمر للرقم التالي.

Method: In the method of root extraction, first place the dividend (shi) in the middle, then place the unit coefficient (yu) below, and the linear coefficient (fang) above. Divide by estimation; multiply the estimate by the unit coefficient to generate the linear coefficient (lian); multiply the estimate by the linear coefficient to generate the square coefficient (fang); multiply the estimate by the square coefficient and subtract from the dividend. When the dividend is exhausted, stop. If not exhausted, double the linear coefficient and proceed to the next digit.

الشرح: في طريقة استخراج الجذر، يُوضع المقسوم (实) في الوسط أولاً، ثم يُوضع المعامل الوحدي (隅) في الأسفل، والمعامل الخطي (方) في الأعلى. يُقسم بالتقدير؛ تُضرب التقدير في المعامل الوحدي لتوليد المعامل الخطي (廉)، تُضرب التقدير في المعامل الخطي لإنتاج المعامل التربيعي، تُضرب التقدير في المعامل التربيعي ويُطرح من المقسوم. عندما ينفد المقسوم، التوقف. إذا لم ينفد، يُضاعف المعامل الخطي ويُستمر للرقم التالي.

Juan 4 Xia —Cewang Xu (Fascicle 4, Part 2: Surveying Continued)

الجزء الرابع ب —القياس والمراقبة (تابع)

Problem 5: Measuring Depth of Water (测水深)

المسألة الخامسة: قياس عمق الماء (深水测)

问 (Wen) 有井不知其深，以绳测之，绳长倍于井深，余三尺；三折而测之适足。求井深及绳长。

المسألة (سؤال) بئر عمقها مجهول. بقياسها بحبل، يكون طول الحبل ضعف عمق البئر مع فائض ثلاثة أشبار؛ بطيّ الحبل على ثلاثة وقياسها، يكون بالضبط. أوجد عمق البئر وطول الحبل.

Translation: There is a well of unknown depth. Measuring with a rope, the rope's length is twice the well's depth with 3 chi to spare. Folding the rope in three and measuring, it fits exactly. Find the depth of the well and the length of the rope.

الترجمة: بئر عمقها مجهول. بقياسها بحبل، يكون طول الحبل ضعف عمق البئر مع فائض ثلاثة أشبار. بطي الحبل على ثلاث وقياسها، يناسب بالضبط. أوجد عمق البئر وطول الحبل.

答 (Da) 井深三尺，绳长九尺。

Answer: The well is 3 chi deep; the rope is 9 chi long.

术 (Shu) 以盈不足求之。倍绳余三尺为盈，三折适足为适足，以盈乘适足为实，并盈适足为法，除之得井深。倍之加余得绳长。

Method: Using the "surplus and deficit" (ying bu zu) method. The 3 chi excess when doubled is the surplus; the exact fit when tripled is the exact amount. Multiply the surplus by the exact amount for the dividend; add surplus and exact amount for the divisor; divide to obtain the well depth. Double and add the excess for the rope length.

Modern solution: Let d = well depth, L = rope length. Then $L = 2d+3$ and $L/3 = d$. Substituting: $2d+3 = 3d$, giving $d = 3$, $L = 9$.

Problem 6: Measuring the Height of a Pagoda (测塔高)

问 (Wen) 有塔高未知，去塔百步立一表高五尺，人目去表一尺八寸，上望塔尖与表端参合。退行六十步，人目去表端仍参合塔尖。求塔高及塔心去表远近。

Translation: A pagoda of unknown height stands at an unknown distance. 100 bu from the pagoda, a 5-chi pole is erected. The observer's eye is 1.8 chi from the ground; looking up, the pagoda's peak aligns with the pole's tip. Retreating 60 bu, the observer's eye again aligns with both the pole's tip and the pagoda's peak. Find the pagoda's height and its distance from the pole.

答 (Da) 塔身高三丈，塔高一十一丈七尺，与八丈七尺为塔心目长。

Answer: The pagoda's body is 3 zhang high; the total height (from ground to peak) is 11 zhang 7 chi; the distance from the pagoda's center to the measuring point is 8 zhang 7 chi.

术 (Shu) 此皆大小形通势相求法也。人目去塔为总股，较人目去干为分小股，人目上塔尖高塔身皆为总股高。相轮高为分大勾，数以干去塔分大勾与小较干去塔为分大勾。

الجواب (جواب) عمق البئر ثلاثة أشبار، وطول الحبل تسعة أشبار.

الإجابة: عمق البئر ثلاثة أشبار، وطول الحبل تسعة أشبار.

طريقة (طريقة) تُحسب بطريقة الوفرة والنقصان. الفائض ثلاثة أشبار عند مضاعفة الحبل هو الوفرة؛ الملاءمة التامة عند الطي على ثلاثة هي الملاءمة. اضرب الوفرة في الملاءمة للمقسوم، واجمع الوفرة والملاءمة للقاسم، اقسم للحصول على عمق البئر. اضعف وأضف الفائض للحصول على طول الحبل.

الشرح: تُستخدم طريقة ``الوفرة والنقصان". الفائض ثلاثة أشبار عند مضاعفة الحبل هو الوفرة؛ الملاءمة التامة عند الطي على ثلاثة هي الملاءمة. تُضرب الوفرة في الملاءمة للمقسوم؛ تُجمع الوفرة والملاءمة للقاسم؛ يُقسم للحصول على عمق البئر. يُضاعف ويُضاف الفائض للحصول على طول الحبل.

الحل الحديث: ليكن d عمق البئر، L طول الحبل. فإن $L = 2d + 3$ و$L/3 = d$. بالتعويض: $2d + 3 = 3d$، فيعطي $d = 3$، $L = 9$.

المسألة السادسة: قياس ارتفاع الباغودا (高塔测)

المسألة (سؤال) باغودا ارتفاعها مجهول. على بُعد مئة خطوة منها يُنصب عمود ارتفاعه خمسة أشبار. عين المراقب على ارتفاع شبر واحد وثمانية بوصات من الأرض؛ بالنظر إلى الأعلى تتطابق قمة الباغودا مع قمة العمود. بالتراجع ستين خطوة، تتطابق عين المراقب مع القمتين مجدداً. أوجد ارتفاع الباغودا ومسافتها عن العمود.

الترجمة: باغودا ارتفاعها مجهول تقف على مسافة مجهولة. على بُعد مئة خطوة يُنصب عمود خمسة أشبار. عين المراقب على ارتفاع شبر وثمانية بوصات؛ بالنظر إلى الأعلى تتطابق القمة مع قمة العمود. بالتراجع ستين خطوة تتطابق العين مع القمتين. أوجد ارتفاع الباغودا ومسافتها عن العمود.

الجواب (جواب) جسد الباغودا ثلاثة أزرة ارتفاعاً، وإجمالي ارتفاعها أحد عشر زراً وسبعة أشبار، ومسافة مركزها عن نقطة القياس ثمانية أزرة وسبعة أشبار.

الإجابة: جسد الباغودا ثلاثة أزرة ارتفاعاً؛ الإرتفاع الكلي (من الأرض إلى القمة) أحد عشر زراً وسبعة أشبار؛ المسافة من مركز الباغودا إلى نقطة القياس ثمانية أزرة وسبعة أشبار.

الطريقة (طريقة) كل هذه تطبيقات لطريقة المثلثات المتشابهة (大形小势通形). مسافة العين من الباغودا هي الوتر الكلي؛ مسافة العين من العمود هي الوتر الصغير؛ ارتفاع قمة الباغودا عن مستوى العين هو الارتفاع الكلي. ارتفاع العجلة الدائرية هو القائمة الكبرى؛ تُستخدم النسب بين هذه الكميات.

Method: These are all applications of similar triangles (da xiao xing tong shi). The distance from eye to pagoda is the total height line (zong gu); the distance from eye to pole is the small height line (fen xiao gu). The height from eye level to pagoda peak is the total height; the height from eye level to pole top is the small height. The method uses proportional relationships between these quantities.

الشرح: هذه كلها تطبيقات للمثلثات المتشابهة. مسافة العين من الباغودا هي الوتر الكلي؛ مسافة العين من العمود هي الوتر الصغير. ارتفاع قمة الباغودا عن مستوى العين هو الارتفاع الكلي؛ ارتفاع قمة العمود عن مستوى العين هو الارتفاع الصغير. تستخدم الطريقة العلاقات التناسبية بين هذه الكميات.

Modern formulation: Using similar triangles with two poles:

$$\frac{\text{Pagoda height} - \text{eye height}}{\text{Distance to pagoda}} = \frac{\text{Pole height} - \text{eye height}}{\text{Distance to pole}}$$

With the given numerical values, this yields the pagoda height $H = 117$ chi and distance $D = 87$ chi.

الصياغة الحديثة: باستخدام المثلثات المتشابهة بعمودين:

$$\frac{\text{ارتفاع الباغودا} - \text{ارتفاع العين}}{\text{المسافة إلى الباغودا}} = \frac{\text{ارتفاع العمود} - \text{ارتفاع العين}}{\text{المسافة إلى العمود}}$$

بالقيم الرقمية المعطاة، يُعطى هذا ارتفاع الباغودا $H = 117$ شبراً ومسافة $D = 87$ شبراً.

Problem 7: Distance Across a River (隔河测远)

问 (Wen) 问隔河望一高岸，不知其远。平地立一表，人目上望见岸顶，又退立一表望之亦见岸顶。求河阔及岸高。

Translation: Across a river, a high bank is visible at an unknown distance. A pole is erected on level ground; looking up from eye level, the bank's top is visible. Retreating and erecting another pole, the bank's top is again visible. Find the width of the river and the height of the bank.

答 (Da) 河阔若干步，岸高若干尺。

术 (Shu) 以重差求之。两表退行步数之差为法，前表去岸远乘表高为实，实如法而一得岸高。又以法除后表去岸远乘表高亦得岸高，两者相验。

Method: Using the "double difference" (chong cha) method. The difference between the two retreat distances is the divisor. Multiply the front pole's distance to the bank by the pole height for the dividend; divide to obtain the bank height. Similarly for the rear pole; the two results should agree (providing verification).

Note: The "double difference" method uses two observations to eliminate the unknown distance, yielding the height directly. This is the method used by Liu Hui in the *Haidao Suanjing* for measuring the sea island. Qin Jiushao generalizes it to polynomial equations of arbitrary degree.

Problem 8: Ninth-Degree Root Extraction (九乘方)

المسألة السابعة: القياس عبر النهر (隔河测远)

المسألة (سؤال) عبر نهر، ضفة مرتفعة مرئية على مسافة مجهولة. يُنصب عمود على أرض مستوية؛ بالنظر إلى الأعلى من مستوى العين تُرى قمة الضفة. بالتراجع ونصب عمود آخر، تُرى القمة مجدداً. أوجد عرض النهر وارتفاع الضفة.

الترجمة: عبر نهر، ضفة مرتفعة مرئية على مسافة مجهولة. يُنصب عمود على أرض مستوية؛ بالنظر إلى الأعلى تُرى قمة الضفة. بالتراجع ونصب عمود آخر، تُرى القمة مجدداً. أوجد عرض النهر وارتفاع الضفة.

الجواب (جواب) عرض النهر عدد معين من الخطوات، وارتفاع الضفة عدد معين من الأشبار.

الطريقة (طريقة) تُحسب بطريقة الاختلاف المزدوج. فرق مسافتي التراجع للعمودين هو القاسم. اضرب مسافة العمود الأمامي من الضفة في ارتفاع العمود للمقسوم، اقسم للحصول على ارتفاع الضفة. وبالمثل للعمود الخلفي؛ ينبغي أن يتفق الناتجان (للتحقق).

الشرح: تُستخدم طريقة ``الاختلاف المزدوج". فرق مسافتي التراجع للعمودين هو القاسم. تُضرب مسافة العمود الأمامي من الضفة في ارتفاع العمود للمقسوم؛ يُقسم للحصول على ارتفاع الضفة. وبالمثل للعمود الخلفي؛ ينبغي أن يتفق الناتجان (للتحقق).

ملاحظة: تستخدم طريقة ``الاختلاف المزدوج" ملاحظتين للتخلص من المسافة المجهولة، معطية الارتفاع مباشرة. هذه هي الطريقة التي استخدمها ليو هوي في كتاب جزيرة البحر لقياس جزيرة البحر. يُعمِّمها تشين جيوشاو إلى معادلات متعددة الحدود من درجة عشوائية.

المسألة الثامنة: استخراج الجذر من الدرجة التاسعة (九乘方)

问 (Wen) 问以开九乘方术解方程，其立法之原若何。

Translation: On the method of extracting ninth-degree roots to solve equations — what is the fundamental principle of this method?

术 (Shu) 开方之术，至于九乘方，其理一也。先列实于中，次定隅位，次立方法、廉法。商除之际，以上乘隅生廉，以上乘廉生方，以上乘方除实。每进一位，则方退一，廉退二，隅退三。如是迭进，直至实尽为止。

Method: The method of root extraction, up to the ninth degree, follows the same principle. First place the dividend in the middle; then determine the unit position; then establish the linear and intermediate coefficients. During division-by-estimation: multiply the estimate by the unit coefficient to generate the intermediate coefficients; multiply the estimate by the intermediate coefficients to generate the linear coefficient; multiply the estimate by the linear coefficient and subtract from the dividend. At each decimal shift, the linear coefficient descends one place, the intermediate descend two places, and the unit descends three. Continue iteratively until the dividend is exhausted.

Mathematical note: This describes **Horner's method** for solving polynomial equations, which Qin Jiushao developed independently centuries before Horner. For a polynomial $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$, the method systematically reduces the polynomial by factoring out $(x - r)$ where r is the estimated root at each step. Qin's achievement in solving tenth-degree equations was unprecedented in world mathematics.

المسألة (سؤال) عن طريقة استخراج الجذر من الدرجة التاسعة لحل المعادلات --- ما المبدأ الأساسي لهذه الطريقة؟

الترجمة: عن طريقة استخراج الجذور من الدرجة التاسعة لحل المعادلات --- ما المبدأ الأساسي لهذه الطريقة؟

الطريقة (طريقة) طريقة استخراج الجذر، حتى الدرجة التاسعة، تتبع نفس المبدأ. ضع المقسوم في الوسط أولاً، ثم حدد موضع المعامل الوحدي، ثم أَسِّس المعامل الخطي والمعاملات الوسيطة. عند القسمة بالتقدير: اضرب التقدير في المعامل الوحدي لتوليد المعاملات الوسيطة، اضرب التقدير في المعاملات الوسيطة لتوليد المعامل الخطي، اضرب التقدير في المعامل الخطي واطرح من المقسوم. عند كل إزاحة عشرية، يتراجع المعامل الخطي مرتبة واحدة، والمعاملات الوسيطة مرتبتين، والمعامل الوحدي ثلاث. استمر تكرارياً حتى ينفد المقسوم.

الشرح: طريقة استخراج الجذر، حتى الدرجة التاسعة، تتبع نفس المبدأ. يُوضع المقسوم في الوسط؛ ثم يُحدد موضع المعامل الوحدي؛ ثم تُؤسَّس المعاملات الخطية والوسيطة. عند القسمة بالتقدير: تُضرب التقدير في المعامل الوحدي لتوليد المعاملات الوسيطة؛ تُضرب التقدير في المعاملات الوسيطة لتوليد المعامل الخطي؛ تُضرب التقدير في المعامل الخطي ويُطرح من المقسوم. عند كل إزاحة عشرية، يتراجع المعامل الخطي مرتبة، والوسيطة مرتبتين، والوحدة ثلاث. استمرار تكراري حتى ينفد المقسوم.

ملاحظة رياضية: يصف هذا **طريقة هورنر** لحل المعادلات متعددة الحدود، التي طوَّرها تشين جيوشاو بشكل مستقل قروناً قبل هورنر. لمعادلة من الدرجة n: $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$، تُنقص الطريقة المعادلة systematically بإخراج العامل $(x - r)$ حيث r هو الجذر المقدَّر في كل خطوة. كان إنجاز تشين في حل معادلات الدرجة العاشرة بلا سابق في تاريخ الرياضيات العالمية.

Appendix: Surveying Methods in Chinese Mathematics

ملحق: طرق القياس في الرياضيات الصينية

A.1 The Double Difference Method (重差术)

أ.١ طريقة الاختلاف المزدوج (重差术)

The "double difference" (chong cha, 重差) method is the crowning achievement of ancient Chinese surveying. Originating in Liu Hui's commentary on the *Jiuzhang Suanshu* (c. 263 CE) and given full expression in his *Haidao Suanjing*, the method uses two (or more) observations from different positions to determine inaccessible heights and distances.

تُعدُّ طريقةُ ``الاختلاف المزدوج" (重差) إنجازاً تاجياً في المساحة الصينية القديمة. نشأت في تعليقات ليو هوي على كتاب المسائل التسع (حوالي ٢٦٣ م) وأُعطيت صياغة كاملة في كتاب جزيرة البحر الحسابي، تستخدم الطريقة ملاحظتين (أو أكثر) من مواضع مختلفة لتحديد الارتفاعات والمسافات غير المتاحة.

The name “double difference” refers to the two difference measurements: the difference in distances between the two observation points, and the difference in alignment angles (or pole heights). From these two differences, the unknown quantities are calculated by proportional reasoning through similar right triangles.

يشير اسم ``الاختلاف المزدوج" إلى قياسي الاختلاف: فرق المسافات بين نقطتي الملاحظة، وفرق زوايا المحاذاة (أو ارتفاعات العمود). من هذين الاختلافين، تُحسب الكميات المجهولة بالتناسل من خلال المثلثات القائمة المتشابهة.

A.2 Similar Triangles in Chinese Mathematics (勾股通势)

The Chinese term *gougu tongshi* (勾股通势, “corresponding forms of hook and gourd”) expresses the principle of similar right triangles. The *gou* (勾) is the base, the *gu* (股) is the altitude, and the *xian* (弦) is the hypotenuse. When two right triangles share an acute angle, their corresponding sides are proportional: $\frac{\text{gou}_1}{\text{gou}_2} = \frac{\text{gu}_1}{\text{gu}_2} = \frac{\text{xian}_1}{\text{xian}_2}$.

أ.٢ المثلثات المتشابهة في الرياضيات الصينية (勾股通势)

يعبر المصطلح الصيني 勾股通势 (``الأشكال المتقابلة للوتر والقائمة") عن مبدأ المثلثات القائمة المتشابهة. الـ 勾 هو القاعدة، والـ 股 هو الارتفاع، والـ 弦 هو الوتر. عندما يتشارك مثلثان قائمان زاوية حادة، فإن أضلاعهما المتقابلة متناسبة: $\frac{\text{وتر}_1}{\text{وتر}_2} = \frac{\text{ارتفاع}_1}{\text{ارتفاع}_2} = \frac{\text{قاعدة}_1}{\text{قاعدة}_2}$.

This principle, equivalent to what Euclid called the property of similar triangles (Elements VI.4), was used extensively in Chinese surveying. The *Ce Wang* problems all reduce to setting up proportions between known and unknown gou-gu pairs and solving for the inaccessible quantity.

هذا المبدأ، المكافئ لما دعا إقليده خاصية المثلثات المتشابهة (العناصر س٦.٤)، استُخدم على نطاق واسع في المساحة الصينية. تُختزل جميع مسائل القياس والمراقبة إلى إقامة التناسبات بين أزواج الوتر والقائمة المعروفة والمجهولة وحل الكمية غير المتاحة.

A.3 The Counting Rod System (筹算)

The counting rod system (chou suan, 筹算) was the primary computational tool in ancient Chinese mathematics. Numbers were represented by bamboo sticks arranged in a decimal place-value system on a counting board. This positional system enabled sophisticated algebraic computations including root extraction and solution of polynomial equations up to degree 10.

أ.٣ نظام الأعواد الحسابية (筹算)

كان نظامُ الأعواد الحسابية (筹算) الأداةَ الحسابية الأساسية في الرياضيات الصينية القديمة. تُمثَّل الأرقام بعصي الخيزران مرتبة في نظام قيمة مكانية عشري على لوح حسابي. مكَّن هذا النظام الموقعي من عمليات جبرية متطورة تشمل استخراج الجذور وحل المعادلات متعددة الحدود حتى الدرجة العاشرة.

In the counting rod layout for root extraction, the positions were arranged in columns: *shang* (商, result/estimate), *shi* (实, dividend), *fang* (方, linear coefficient), *lian* (廉, intermediate coefficients), and *yu* (隅, unit coefficient). At each step of the computation, these values were updated according to the algorithm, with systematic place-value shifts.

في تخطيط الأعواد الحسابية لاستخراج الجذر، كانت المواضع مرتبة في أعمدة: 商 (النتيجة/التقدير)، و 实 (المقسوم)، و 方 (المعامل الخطي)، و 廉 (المعاملات الوسيطة)، و 隅 (المعامل الوحدي). عند كل خطوة من الحساب، حُدِّثت هذه القيم وفق الخوارزمية، مع إزاحات منهجية للقيمة الموقعية.

A.4 Qin Jiushao’s Generalization

Qin Jiushao’s contribution to surveying mathematics was to unify the double-difference method with his general root-extraction technique (the “method of the celestial element,” tian yuan shu). This allowed him to formulate surveying problems as polynomial equations of high degree and solve them systematically. His solution of a tenth-degree equation arising from a surveying problem (Problem 1 of this fascicle) stands as a remarkable achievement in medieval mathematics.

أ.٤ تعميم تشين جيوشاو

كان إسهامُ تشين جيوشاو في رياضيات المساحة هو توحيد طريقة الاختلاف المزدوج مع تقنيته العامة لاستخراج الجذور (``طريقة العنصر السماوي"، 天元术). هذا مكَّنه من صياغة مسائل المساحة كمعادلات متعددة حدود من درجة عالية وحلها بشكل منهجي. يُعد حله لمعادلة من الدرجة العاشرة الناشئة عن مسألة مساحة (المسألة الأولى من هذا الجزء) إنجازاً ملحوظاً في الرياضيات الوسطى.